PYTHAGORAS Vol. 5, No. 1, Juni 2009: 38-44

PEMBENTUKAN ISOMORFISMA DARI GELANGGANG FAKTOR KE GELANGGANG FAKTOR LOKAL

Amir Kamal Amir

Kelompok Keahlian Aljabar
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar 90245, Indonesia
amirkamalamir@yahoo.com

Abstrak

Suatu gelanggang lokal adalah gelanggang yang hanya mempunyai satu ideal maksimal. Ideal prim suatu gelanggang dapat dipakai untuk mencari gelanggang local dan dapat juga dipakai untuk membentuk gelanggang faktor. Sedangkan ideal maksimal dari gelanggang lokal dapat dipakai untuk membentuk gelanggang faktor lokal. Tulisan ini akan memaparkan secara lebih terperinci dan jelas, sehingga akan lebih mudah dimengerti, mengenai gelanggang faktor dan pembentukan isomorfisma antara gelanggang faktor dengan gelanggang faktor lokal.

Keywords: *faktor , gelanggang lokal, maksimal, multiplikatif, ideal prim.*

PENDAHULUAN

Dari suatu daerah integral dapat dibentuk suatu lapangan yang disebut lapangan fraksi. Dalam sutau lapagan fraksi dapat ditemukan suatu gelanggang yang hanya mempunyai satu ideal maksimal. Gelanggang seperti ini disebut gelanggang lokal. Salah satu cara untuk mendapatkan gelanggang local yaitu dengan menggunakan himpunan bagian multiplikatif. Sedangkan untuk mendapatkan himpunan multiplikatif dapat digunakan ideal prim.

Permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah bagaiamana merancang atau membentuk satu isomorfisma dari gelanggang faktor ke gelanggang faktor lokal. Dalam tulisan ini memaparkan secara lebih terperinci dan jelas, sehingga lebih mudah untuk dimengerti, mengenai himpunan bagian multiplikatif, gelanggang lokal, dan satu isomorfisma dari gelangggang faktor ke gelanggang faktor lokal. Dengan terbentuknya isomorfisma ini, maka gelanggang faktor akan isomorfik dengan gelanggang faktor lokal. Dengan demikian untuk mengetahui struktur dari gelanggang faktor lokal dapat diselidiki melalui gelanggang faktor yang lebih sederhana. Untuk mempermudah pembahasan, maka pada bagian awal dari tulisan ini disajikan beberapa pengertian, dan notasi yang akan digunakan dalam pembahsan selanjutnya.

PEMBAHASAN

Untuk mempermudah pembahasan, maka pada bagian awal dari bagian ini disajikan beberapa pengertian, dan notasi yang akan digunakan dalam pembahsan selanjutnya.

Definisi 1.1

Suatu gelanggang R disebut gelanggang lokal jika ia mempunyai tepat satu ideal maksimal.

Contoh 1.2

Misalkan R adalah sebagai berikut, $R = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in Z,\, b \neq 0,\, b \text{ ganjil} \right\}$, maka R adalah gelanggang lokal, dengan Z adalah himpunan bilangan bulat.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $M = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a, b \in Z,\, b \neq 0,\, b \text{ ganjil, } a \text{ genap} \right\}$ adalah satu-satunya ideal maksimal dari R. Dengan mudah dapat diamati bahwa M adalah suatu ideal dalam R. Selanjutnya misalkan I adalah suatu ideal dalam R dengan $I \neq R$. Untuk menunjukkan bahwa M adalah satu-satunya ideal maksimal, maka akan ditunjukkan bahwa I termuat dalam M. Andaikan I tidak termuat dalam M, berarti terdapat $\frac{a}{b} \in I$ dengan $b \neq 0, b$ ganjil, dan a ganjil . Karena a ganjil, maka $\frac{b}{a} \in R$. Dengan demikian $1 = \frac{a}{b} . \frac{b}{a} \in I$. Karena $1 \in I$, maka $I = R$. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan sebelumnya.

Definisi 1.3

Misalkan D adalah suatu daerah integral. Terdapat suatu lapangan K yang memuat D dengan syarat untuk setiap $c \in K$, c dapat ditulis dalam bentuk $c = ab^{-1}$, $a, b \in D$ dan $b \neq 0$. Lapangan seperti ini disebut lapangan fraksi dari D.

Contoh 1.4

Q adalah lapangan fraksi dari Z, dengan Q adalah himpunan bilangan rasional dan Z adalah himpunan bilangan bulat.

Definisi 1.5

Misalkan D adalah suatu daerah integral dengan lapangan fraksi K. suatu himpunan bagian S dari D disebut himpunan bagian multiplikatif jika $0 \notin S$, $1 \in S$, dan S tertutup terhadap operasi perkalian. Selanjutnya, jika S adalah suatu himpunan bagian multiplikatif, maka didefinisikan $S^{-1}D = \left\{ \frac{a}{b} \in K \middle| b \in S \right\}$. Himpunan ini jelas merupakan suatu subgelanggang dari K.

Contoh 1.6

$S = \left\{1, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots\right\}$ adalah himpunan bagian multiplikatif dari daerah integral Z, yaitu himpunan bilangan bulat.

Pada teori berikut diberikan hubungan antara ideal prim dengan himpunan bagian multiplikatif.

Teorema 1.7

Jika P adalah suatu ideal prim dari D, maka $S_P = D \setminus P$ adalah suatu himpunan bagian multiplikatif dari D.

Bukti:

Karena $0 \in P$, maka $0 \notin S_P$. Karena $1 \notin P$, maka $1 \in S_P$. Selanjutnya, ambil $a, b \in S_P$ berarti $a, b \notin P$. Dengan menggunakan sifat prim dari P diperoleh $ab \notin P$. Dengan dimikian $ab \in S_P$.

Dalam pembahasan selanjutnya, $S_P^{-1}D$ ditulis sebagai D_P. Sebagai contoh , jika $P = \langle 3 \rangle$, maka $Z_P = \left\{ \frac{a}{b} \in Q \;\middle|\; b \text{ tidak habis dibagi oleh } 3 \right\}$, dengan Q adalah himpunan bilangan rasional dan Z adalah himpunan bilangan bulat.

Salah satu cara untuk membentuk gelanggang lokal yaitu menggunakan ideal prim. Secara lengkap tatacara pembentukannya diberikan oleh teori berikut.

Teorema 1.8

Jika P adalah suatu ideal prim dari D, maka D_P adalah suatu gelanggang lokal.

Bukti:

Karena P adalah ideal prim, maka P memuat semua ideal-ideal prim yang terpisah dari S_P. Dengan demikian, ideal PD_P merupakan satu-satunya ideal maksimal dalam D_P.

Milne (1998) memberikan bentuk korespondensi satu-satu dan pada dari himpunan ideal-ideal prim dalam D ke himpunan ideal-ideal prim dalam $S^{-1}D$. Secara lengkap teori tersebut disajikan berikut.

Teorema 1.9 (Milne, 1998)

Misalkan D adalah suatu daerah integral dan misalkan S adalah suatu himpunan bagian multiplikatif dari D, maka pemetaan

$$P \mapsto S^{-1}P = \left\{ \frac{a}{s} \;\middle|\; a \in P, s \in S \right\}$$

merupakan pemetaan satu-satu dan pada dari himpunan ideal-ideal prim dalam D yang memenuhi $P \cap S = \varnothing$ ke himpunan ideal-ideal prim dalam $S^{-1}D$. Invers dari pemetaan tersebut adalah $Q \mapsto Q \cap D$, dengan Q adalah ideal dalam $S^{-1}D$.

Bukti:

Dengan mudah dapat dilihat bahwa, jika *P* adalah suatu ideal prim yang terpisah dari *S*, maka $S^{-1}P$ adalah suatu ideal prim dan jika *Q* adalah ideal prim dalam $S^{-1}D$, maka $Q \cap D$ adalah suatu ideal dalam *D* yang terpisah dari *S*. Jadi, untuk melengkapi pembuktian, selanjutnya ditunjukkan bahwa

$$\left(S^{-1}P\right) \cap D = P \text{ dan } S^{-1}\left(Q \cap D\right) = Q.$$

a. Akan ditunjukkan bahwa $\left(S^{-1}P\right) \cap D = P.$

   Jelas terlihat bahwa $\left(S^{-1}P\right) \cap D \supseteq P.$ Untuk kebalikannya, misalkan $\frac{a}{s} \in \left(S^{-1}P\right) \cap D,\ a \in P,\ s \in S.$ Perhatikan pernyataan $\frac{a}{s}.s = a \in P.$ Karena kedua $\frac{a}{s}$ dan s berada dalam *D* dan *P* adalahi ideal prim dalam *D*, maka paling sedikit satu diantara $\frac{a}{s}$ atau s berada dalam *P*. Tetapi karena $s \notin P$ (diasumsikan), maka $\frac{a}{s} \in P.$

b. Akan ditunjukkan bahwa $S^{-1}\left(Q \cap D\right) = Q.$

   Jelas terlihat bahwa $S^{-1}\left(Q \cap D\right) \subseteq Q$ karena $Q \cap D \subseteq Q$ dan Q adalah suatu ideal dalam $S^{-1}D.$ Untuk kebalikannya, misalkan $b \in Q.$ Karena Q adalah ideal dalam $S^{-1}D,$ maka *b* dapat dituliskan seperti $b = \frac{a}{s}$ dengan $a \in D,\ s \in S,$ sehingga $a = s.\left(\frac{a}{s}\right) \in Q \cap D.$ Jadi

$$b = \frac{a}{s} = \left(\left(s.\frac{a}{s}\right)\big/ s\right) \in S^{-1}\left(Q \cap D\right).$$

Pada bagian pembahasan selanjutnya disajikan bentuk isomorfisma dari gelanggang faktor, D/P^m, ke gelanggang faktor lokal D_P/Q^m.

Teorema 1.10

Misalkan *P* adalah suatu ideal maksimal dari gelanggang *D*, dan misalkan *Q* adalah suatu ideal yang dibangun dalam D_P, yaitu $Q = P.D_P$, maka pemetaan

$$D/P^m \to D_P/Q^m \quad \text{dengan aturan} \quad a + P^m \mapsto a + Q^m$$

adalah suatu isomorfisma.

Bukti:

Misalkan $\varphi : D/P^m \to D_P/Q^m$ dengan $\varphi(a + P^m) = a + Q^m$. Pertama akan ditunjukkan bahwa pemetaan di atas adalah pemetaan satu-satu. Dalam hal ini ditunjukkan bahwa $Q^m \cap D = P^m$, sebagai langkah awal. Namun demikian, dari proses pembentukan Q, dapat dilihat bahwa, $Q^m = S^{-1}P^m$ dan $S = D \setminus P$, sehingga untuk menunjukkan bahwa $Q^m \cap D = P^m$ cukup ditunjukkan $P^m = (S^{-1}P^m) \cap D$.

Pada satu sisi, jelas terlihat bahwa $P^m \subseteq (S^{-1}P^m) \cap D$. Untuk kebalikannya, suatu elemen $(S^{-1}P^m) \cap D$ dapat ditulis $a = \frac{b}{s}$ dengan $b \in P^m$, $s \in S$, dan $a \in D$. Sehingga $sa \in P^m$. Jadi $(s + P^m)(a + P^m) = sa + P^m = 0 + P^m$. . . . . (2.1).

Pada sisi lain, satu-satunya ideal maksimal yang memuat P^m adalah P (karena jika M adalah ideal maksimal dengan $M \supseteq P^m$, maka $M \supseteq P$. Hal ini kontradiksi karena P adalah ideal maksimal). Dengan demikian maksimal ideal dalam D/P^m hanyalah P/P^m. Karena $s + P^m$ tidak berada dalam P/P^m, maka $s + P^m$ adalah unit dalam D/P^m. Sehingga bersama dengan persamaan (2.1) disimpulkan bahwa $a + P^m = 0 + P^m$. Jadi $a \in P^m$.

Sampai disini sudah ditunjukkan bahwa, $Q^m \cap D = P^m$. Selanjutnya pembuktian sifat satu-satu dilanjutkan. Misalkan $\varphi(c + P^m) = \varphi(d + P^m)$, maka $c + Q^m = d + Q^m$, sehingga $c - d \in Q^m$. Karena $Q^m \cap D = P^m$, maka $c - d \in P^m$. Dengan demikian diperoleh $c + P^m = d + P^m$ yang melengkapi pembuktian sifat satu-satu.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa pemetaan di atas bersifat pada. Ambil $\frac{a}{s} + Q^m \in D_P/Q^m$. Berarti $\frac{a}{s} \in D_P$. Karena $s \notin P$ dan P adalah ideal maksimal, maka $\langle s \rangle + P = D$. Oleh karena itu, terdapat $b \in D$ dan $q \in P^m$ sedemikian sehingga $bs + q = 1$. Dengan demikian

$$
\begin{aligned}
1+Q^m=\varphi\left[(bs+q)+Q\right] &= \varphi\left[\left(b+P^m\right)\left(s+P^m\right)+\left(q+P^m\right)\right] \\
&= \varphi\left(b+P^m\right).\varphi\left(s+P^m\right)+\varphi\left(q+P^m\right) \\
&= \varphi\left(b+P^m\right)\left(s+Q^m\right).
\end{aligned}
$$

Dari persamaan diatas disimpulkan bahwa $\varphi(b+P^m)=\left(s^{-1}\right)+Q^m$. sehingga $\varphi(ba+P^m)=\left(\frac{b}{s}\right)+Q^m$.

SIMPULAN

Dari pembahasan di atas disimpulkan beberapa hal berikut:

Gelanggang faktor yang dibentuk oleh gelanggang tersebut dengan ideal primnya akan isomorfik dengan gelanggang faktor yang dibentuk oleh gelanggang lokal dengan ideal maksimalnya, dengan catatan bahwa gelanggang lokal ini berkorespondensi dengan ideal prim tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Milne, J.S. 1998. *Algebraic Number Theory*. Lecture note at the University of Michigan.

Lam, T.Y. 1999. *Lectures on Modules and Rings*. New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer.

McConnell, J.C. & Robson, J.C. 1987. *Noncommutative Noetehrian Rings*. Chichester: John Wiley and Sons, Inc.

Passman, D.S. 1991. *A Course in Ring Theory*. California: Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software.

Spindler, K. 1994. *Abstract Algebra With Applications*. New York: Marcel Dekker, INC.

Kempf, G.R. 1995. *Algebraic Structures*. Braunschweig: Viewieg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH.