



Tinjauan Matematis Waktu Tundaan pada Model Covid-19 dengan Vaksinasi

Fitriana Yuli Saptaningtyas^{1*} , Ahmadi¹

¹ Program Studi Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia

* Corresponding Author. E-mail: fitriantya@uny.ac.id

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 06-Mei. 2022

Revised: 07-Jun. 2022

Accepted: 04-Oct. 2022

Keywords:

Covid-19, vaksinasi, waktu tundaan.

ABSTRACT

Artikel ini membahas pemodelan matematika penyebaran Covid-19 dengan vaksinasi yang melibatkan waktu tundaan. Waktu tundaan merepresentasikan waktu individu mengalami penurunan kekebalan tubuh sehingga kembali rentan terhadap Covid-19 setelah sembuh. Kita tahu bahwa individu yang dinyatakan sembuh dari Covid-19 dapat terinfeksi kembali. Penelitian ini menganalisa titik ekuilibrium beserta kestabilannya, menentukan bilangan reproduksi dasar untuk melihat penyebaran penyakit, menentukan jenis bifurkasi yang muncul yang diakibatkan oleh waktu tundaan, dan melakukan simulasi numerik untuk melihat perilaku penyebaran penyakit. Di samping itu juga dilakukan kajian analitik untuk menentukan bilangan reproduksi dasar dan analisa perbandingan kestabilan lokal untuk model tanpa waktu tundaan dan dengan waktu tundaan. Hasil dari analisis terhadap model didapat dua titik ekuilibrium, yakni satu bebas penyakit dan satu endemik. Pada model dengan waktu tundaan diperoleh bahwa waktu tundaan tertentu dapat menyebabkan munculnya solusi periodik artinya akan terjadi fluktuasi banyaknya individu yang terinfeksi pada periode waktu tertentu. Simulasi numerik dengan mengubah ubah parameter waktu tundaan dan tingkat vaksinasi menunjukkan pada kondisi endemik model dengan waktu tundaan akan menyebabkan lebih banyak individu yang terinfeksi dari pada model tanpa waktu tundaan.

This article discusses the mathematical modeling of the spread of Covid-19 with vaccination which involves a time delay. The time delay is represented when an individual experiences a decreased immune system so that he is declared susceptible to Covid-19 after recovering. Because we know that individuals who are declared cured of Covid-19 can be reinfected, this study analyzes the equilibrium point of the model and its stability, determines the primary reproduction number to see the spread of the disease, determines the type of bifurcation that appears due to the time delay, and performs numerical simulations. To see the behavior of the spread of the disease. In addition, analytical studies were carried out to determine the primary reproduction number and local stability comparison analysis for models without time delay and with time delay. The model analysis results obtained two equilibrium points, one free of disease and one endemic. In the time-delayed model, the value of the time-delay parameter is obtained, which causes the emergence of a periodic solution, meaning that there will be fluctuations in the number of individuals infected in a certain period. Numerical simulations by changing the time delay parameters and vaccination rates show that in endemic conditions, models with time delays will cause more individuals to be infected than models that do not use time delays.



This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license



How to Cite:

Saptaningtyas, F. Y., & Ahmadi, A. (2022). Tinjauan matematis waktu tundaan pada model covid-19 dengan vaksinasi. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 17(1), 308-320. <https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i1.49372>

 <https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i1.49372>

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika penyebaran Covid-19 dilakukan mengikuti strategi penanganannya, model dengan mempertimbangkan isolasi dan *lock down* dikaji oleh (Yang dkk., 2021), model melibatkan pentingnya kesadaran mengenai Covid-19 (*awareness program*) dikaji oleh (Musa dkk., 2021). Beberapa model matematika untuk

pemodelan transmisi Covid-19 pada manusia telah dilakukan oleh ([Chen dkk., 2020](#); [Eikenberry dkk., 2020](#); [Gilbert dkk., 2020](#); [Iboi dkk., 2020](#); [Ngonghala dkk., 2020](#); [Tang dkk., 2020](#); [Wu dkk., 2020](#); [Wu dkk., 2020](#)). Pemodelan matematika mengenai penyebaran Covid-19 di Indonesia berbasis model SEIR (*susceptible, exposure, infected, recovery*) telah dilakukan oleh ([Suwardi dkk., 2020](#)), model tersebut telah mempertimbangkan faktor vaksinasi dan isolasi sebagai parameter. Kajian Kajian analitik dan numerik menunjukkan bahwa vaksinasi dan isolasi dapat memperlambat penyebaran Covid-19. Model matematika yang mempertimbangkan vaksinasi juga dikaji oleh ([Nuning dkk., 2021](#)) model ini berbasis SIQRD (*susceptible, infected, quarantine, recovery, death*) serta membedakan kelompok umur. Dari penelitian tersebut, strategi periode vaksinasi yang tepat serta memberi prioritas sesuai kelompok umur akan memberikan dampak yang signifikan pada penekanan penyebaran Covid-19. Model yang membahas mengenai vaksinasi dan transmisi pathogen juga dilakukan oleh Chukwu dan Fatmawati ([Chukwu dan Fatmawati, 2022](#)). Penelitian berkaitan dengan model SEQIR (*susceptible, exposure, quarantine, infected, recovery*) lain yang mempertimbangkan karantina juga telah diteliti Saptaningtyas dan Prihantini. Model matematika penyebaran Covid di Indonesia dengan strategi *lock down* telah dikaji oleh Sugianto dan Abrori ([Sugianto dan Abrori, 2020](#)). Sedangkan [Subian dkk. \(2021\)](#) menggunakan data yang ada mengembangkan prediksi kasus terinfeksi Covid-19 menggunakan generalisasi model liner. Pada penelitian tersebut belum melibatkan adanya waktu tundaan. Model SEIR penyebaran Covid-19 dikembangkan oleh [Devipriya dkk. \(2021\)](#) yang telah mempertimbangkan adanya waktu tundaan. Kajian analitik dilakukan dengan kestabilan lokal menggunakan kriteria Routh Hourwitz.

Adanya masa inkubasi yaitu periode sebelum individu yang terinfeksi menjadi individu terinfeksi dapat menjadi salah satu ciri perlunya waktu tundaan. Banyak aplikasi kehidupan yang memerlukan model dengan waktu tundaan. Model matematika dengan dua waktu tundaan diskret juga dapat diaplikasikan ke jaringan komputer seperti pada paper Ahmadi dan Widodo ([Ahmadi dan Widodo, 2020](#)). Paper tersebut, membahas analisa kestabilan lokal pada model propagasi malware pada jaringan komputer dengan dua waktu tundaan diskret, yakni dari kelas rentan ke terinfeksi dan recovered ke rentan. Sementara itu, pada paper yang dipublikasikan oleh [Yang, dkk. \(2021\)](#), model tundaan diaplikasikan di kasus Covid-19. Pada model yang dibangun, populasi dibagi menjadi 5 kelas, yakni SEIHR dan mempertimbangkan 3 waktu tundaan. Sedangkan, [Devipriya dkk. \(2021\)](#) meneliti terkait pengaruh tundaan pada model SEIR. Berdasarkan penelitian tersebut, model SEIR lebih efektif untuk memprediksi pandemik Covid-19. Tak hanya itu, model tundaan juga digunakan untuk meneliti strategi penundaan pada dinamika penularan penyakit HIV/AIDS ([Raza dkk., 2020](#)).

Pada bab ini, akan dibahas mengenai model matematika penyebaran Covid-19 dengan mempertimbangkan vaksinasi dan waktu tundaan yang berbasis pada model SEIR. Kajian dinamik dilakukan dengan analisa kestabilan lokal pada sistem dengan maupun tanpa waktu tundaan. Selain itu, juga dikaji mengenai bilangan reproduksi dasar dan kajian mengenai waktu tundaan yang dapat menyebabkan munculnya bifurkasi baik secara analitik maupun numerik. Simulasi numerik diberikan untuk menunjukkan kestabilan titik ekuilibrium bebas Covid-19 maupun endemik. Untuk mengetahui efek adanya waktu tundaan dan vaksinasi juga diberikan melalui kajian solusi numerik.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian terapan dengan memformulasikan model matematika berbasis SEIR (*susceptible, exposure, infected, recovery*) dengan melibatkan waktu tunda. Adapun langkah penelitian sebagai berikut: memodelkan kasus penyebaran Covid-19 dengan mempertimbangkan vaksinasi serta melibatkan waktu tunda, menentukan semua titik ekuilibrium. menentukan bilangan reproduksi dasar, membandingkan kestabilan titik ekuilibrium pada model tanpa waktu tundaan dan dengan waktu tundaan, menentukan parameter dengan estimasi polynomial menggunakan data dari tanggal 30 April 2021 sampai dengan 14 Juli 2021, dan melakukan simulasi numerik dan interpretasi.

HASIL PENELITIAN

Pada bagian ini dibahas mengenai pembentukan model penyebaran Covid-19 dengan melibatkan vaksinasi dan adanya waktu tundaan diskret. Kajian perilaku dinamik meliputi penentuan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, analisa kestabilan lokal dengan dan tanpa waktu tundaan dan bifurkasi secara numerik.

Model Matematika Penyebaran Covid-19 Melibatkan Vaksinasi dan Waktu Tundaan

Dalam model matematika ini, populasi dibagi menjadi 4 kelas, yakni kelas yang rentan COVID 19 dinotasikan dengan $S(t)$, kelas terpapar dinotasikan dengan $P(t)$, kelas terinfeksi dinotasikan dengan $F(t)$, dan kelas sembuh dinotasikan dengan $R(t)$. Asumsi – asumsi pada model ini adalah:

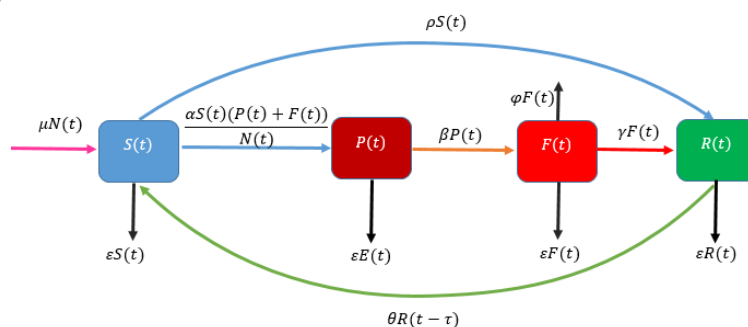
1. Populasi bersifat terbuka dan homogen,
2. Hanya ada satu penyakit saja yang berada dalam populasi,
3. Hanya ada satu waktu tundaan yaitu waktu yang diperlukan individu dari kelas yang sembuh ke kelas yang rentan,
4. Individu yang sembuh dari COVID 19 akan kembali lagi ke kelas rentan karena kekebalan tubuhnya mengalami penurunan,
5. Vaksinasi yang dimaksudkan dalam model adalah individu yang sudah mendapatkan vaksinasi tahap 2,
6. Individu yang telah divaksin kekebalannya menurun dan akan menjadi rentan.

Parameter yang digunakan untuk menyusun model terdapat dalam [Tabel 1](#).

Tabel 1. Parameter

| Notasi | Keterangan |
|---------------|--|
| μ | Tingkat kelahiran alami |
| α | Tingkat interaksi antara individu yang rentan dengan terpapar atau terinfeksi |
| ρ | Tingkat vaksinasi Covid-19 tahap 2 |
| β | Tingkat perubahan individu dari kelas exposed ke kelas terinfeksi |
| ε | Tingkat kematian alami |
| φ | Tingkat kematian yang disebabkan Covid-19 |
| γ | Tingkat kesembuhan |
| θ | Tingkat perubahan dari individu yang sembuh dari Covid-19 ke kelas yang rentan |

[Gambar 1](#) menjelaskan mengenai diagram transfer model matematika penyebaran Covid-19 dengan vaksinasi dan adanya waktu tundaan.



Gambar 1. Diagram alir model Covid-19

Vaksinasi dilakukan pada individu yang rentan, apabila telah mendapatkan vaksinasi sebanyak 2 kali maka akan berpindah menjadi individu yang sembuh. Individu yang sembuh merupakan individu yang telah mendapatkan vaksin atau individu yang telah sembuh dari terinfeksi Covid-19. Setelah sembuh maupun mendapat vaksin akan mempunyai kekebalan sementara, setelah itu akan dapat kembali rentan. Seiring dengan menurunnya daya tahan tubuh terhadap infeksi Covid-19. Individu yang telah sembuh tidak langsung masuk ke kelas yang rentan, memerlukan waktu dalam hal ini merupakan waktu tundaan yang dinotasikan dengan τ .

Sebelum terinfeksi, individu masuk ke dalam kelas terpapar, hal ini mengingat melibatkan vaksinasi yang tidak boleh dilakukan pada individu terpapar. Kematian alami terjadi pada kelas rentan, terpapar, dan sembuh dengan tingkat yang sama. Kematian karena Covid-19 hanya pada individu yang telah dinyatakan terinfeksi. Model matematika yang terbentuk dari empat kelas dengan melibatkan vaksinasi dan waktu tundaan adalah:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu N(t) + \theta R(t-\tau) - (\varepsilon + \rho)S(t) - \frac{\alpha S(t)(P(t) + F(t))}{N(t)} \\ \frac{dE(t)}{dt} = \frac{\alpha S(t)(P(t) + F(t))}{N(t)} - (\beta + \varepsilon)P(t) \\ \frac{dF(t)}{dt} = \beta P(t) - (\varphi + \varepsilon + \gamma)F(t) \\ \frac{dQ(t)}{dt} = \rho S(t) + \gamma F(t) - \varepsilon R(t) - \theta R(t-\tau) \end{cases} \quad (1)$$

dengan $S(t), E(t), F(t), Q(t) \geq 0$ dan nilai awal

$$\begin{cases} S(t_0) = S_0, E(t_0) = E_0, F(t_0) = F_0, Q(t_0) = Q_0. \\ t_0 \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

Untuk $(S_0, E_0, F_0, Q_0) \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathcal{R}_+^4)$. Dalam hal ini \mathcal{C} merupakan ruang Banach dari fungsi kontinu yang dipetakan dari interval $[-\tau, 0]$ ke \mathcal{R}_+^4 . Sistem (1) merupakan model matematika penyebaran Covid-19 dengan mempertimbangkan tingkat vaksinasi dan waktu tundaan diskret.

Untuk penyederhanaan diubah dalam model nondimensi. Misalkan $N(t)$ merupakan total populasi, maka

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\mu - \varepsilon)N(t) - \varphi F(t) \leq (\mu - \varepsilon)N(t)$$

Selanjutnya, Sistem (1) akan dinondimensionalkan dengan transformasi

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{S(t)}{N(t)} \rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{N(t)} \frac{dS(t)}{dt} - \frac{s(t)}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} \\ p(t) &= \frac{P(t)}{N(t)} \rightarrow \frac{dp(t)}{dt} = \frac{1}{N(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{p(t)}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} \\ f(t) &= \frac{F(t)}{N(t)} \rightarrow \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{N(t)} \frac{dF(t)}{dt} - \frac{f(t)}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} \\ q(t) &= \frac{Q(t)}{N(t)} \rightarrow \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{N(t)} \frac{dQ(t)}{dt} - \frac{q(t)}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} \end{aligned}$$

dengan $s(t) + p(t) + f(t) + q(t) = 1$.

Akibatnya, Sistem (1) menjadi

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = \mu - (\mu + \rho)s(t) - \alpha s(t)(p(t) + f(t)) + \theta r(t-\tau) \\ \frac{dp(t)}{dt} = \alpha s(t)(p(t) + f(t)) - (\beta + \mu)p(t) \\ \frac{df(t)}{dt} = \beta p(t) - (\varphi + \gamma + \mu)f(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = \rho s(t) + \gamma f(t) - \mu r(t) - \theta r(t-\tau) \end{cases} \quad (2)$$

dengan $0 \leq s(t), p(t), f(t), r(t) \leq 1$.

Sistem (2) inilah yang disebut dengan model non dimensi penyebaran Covid-19 dengan mempertimbangkan tingkat vaksinasi dan waktu tundaan diskret.

Selanjutnya akan dianalisa perilaku dinamik Sistem (2) sebagai berikut.

Titik Ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Kajian perilaku dinamik yang paling sederhana dapat diketahui pada keadaan ekuilibrium. Titik ekuilibrium merupakan suatu titik yang nilainya tidak akan berubah seiring dengan berjalannya waktu (gradiennya

konstan). Keadaan bebas Covid-19 dinyatakan ketika tidak ada infeksi. Titik ekuilibrium bebas Covid-19 pada Sistem (2), diperoleh ketika nilai dari $\bar{p} = \bar{f} = 0$, sehingga Sistem (2) menjadi

$$\begin{cases} \mu - (\mu + \rho) \bar{s} + \theta \bar{r} = 0 \\ \rho \bar{s} - (\mu + \theta) \bar{r} = 0 \end{cases}$$

Apabila sistem tersebut diselesaikan, maka diperoleh

$$\bar{s} = \frac{\theta + \mu}{\mu + \rho + \theta} \quad \text{dan} \quad \bar{r} = \frac{\rho}{\mu + \rho + \theta}$$

Sehingga, diperoleh titik ekuilibrium bebas Covid-19 yaitu:

$$E_1 = (\bar{s}, \bar{p}, \bar{f}, \bar{r}) = \left(\frac{\theta + \mu}{\mu + \rho + \theta}, 0, 0, \frac{\rho}{\mu + \rho + \theta} \right)$$

Artinya dalam waktu yang sangat lama, proporsi individu yang rentan, sembuh akan tetap ada dalam populasi. Sedangkan individu yang terpapar dan terinfeksi akan hilang dari populasi.

Keadaan endemik apabila individu terinfeksi tidak nol. Berdasarkan Sistem (2) diperoleh titik ekuilibrium endemik yaitu:

$$\begin{cases} \mu - (\mu + \rho) \bar{s} - \alpha \bar{s} (\bar{p} + \bar{f}) + \theta \bar{r} = 0 \\ \alpha \bar{s} (\bar{p} + \bar{f}) - (\beta + \mu) \bar{p} = 0 \\ \beta \bar{p} - (\varphi + \gamma + \mu) \bar{f} = 0 \\ \rho \bar{s} + \gamma \bar{f} - (\mu + \theta) \bar{r} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Dari persamaan ketiga dari Sistem (3) diperoleh

$$\bar{p} = a_1 \bar{f}$$

dengan

$$a_1 = \frac{\varphi + \gamma + \mu}{\beta}$$

Apabila nilai $\bar{p} = a_1 \bar{f}$ disubstitusikan ke persamaan kedua dari Sistem (3), maka didapatkan

$$\bar{s} = \frac{a_1 (\beta + \mu)}{\alpha (a_1 + 1)}$$

Jika $\bar{s} = \frac{a_1 (\beta + \mu)}{\alpha (a_1 + 1)}$ disubstitusikan ke persamaan keempat dari Sistem (3), maka diperoleh

$$\bar{r} = \frac{\rho a_1 (\beta + \mu) + \alpha \gamma \bar{f} (a_1 + 1)}{\alpha (a_1 + 1) (\mu + \theta)}$$

Apabila nilai dari $\bar{s}, \bar{p}, \bar{r}$ yang telah didapatkan di atas disubstitusikan ke persamaan pertama dari Sistem (3), maka didapatkan

$$\bar{f} = \frac{a_2 - a_3}{a_4},$$

dengan

$$a_1 = \frac{\varphi + \gamma + \mu}{\beta}, \quad a_2 = \mu \alpha (a_1 + 1) (\mu + \theta),$$

$$a_3 = a_1 (\mu + \rho) (\beta + \mu) (\mu + \theta) + \theta \rho a_1 (\beta + \mu),$$

$$a_4 = \alpha (a_1 + 1) (a_1 (\beta + \mu) (\mu + \theta) - \theta \gamma).$$

Diperoleh titik ekuilibrium endemik Covid-19 sebagai berikut:

$$E_2 = (\bar{s}, \bar{p}, \bar{f}, \bar{r}) = (s^*, p^*, f^*, r^*)$$

dengan

$$s^* = \frac{a_1(\beta + \mu)}{\alpha(a_1 + 1)}, p^* = a_1 f^*,$$

$$r^* = \frac{\rho a_1(\beta + \mu) + \alpha \gamma f(a_1 + 1)}{\alpha(a_1 + 1)(\mu + \theta)}, f^* = \frac{a_2 - a_3}{a_4},$$

$$a_1 = \frac{\varphi + \gamma + \mu}{\beta}, a_2 = \mu \alpha(a_1 + 1)(\mu + \theta),$$

$$a_3 = a_1(\mu + \rho)(\beta + \mu)(\mu + \theta) + \theta \rho a_1(\beta + \mu),$$

$$a_4 = \alpha(a_1 + 1)(a_1(\beta + \mu)(\mu + \theta) - \theta \gamma).$$

Artinya virus COVID 19 akan tetap ada dalam populasi dan akan menjadi endemik dalam waktu yang lama. Yang menjadi pertanyaan berikutnya adalah bagaimana cara menganalisa suatu virus masih tergolong endemik atau tidak. Dalam menjawab pertanyaan tersebut dapat menggunakan bilangan reproduksi dasar. Berdasarkan Gambar 1 dan Sistem (2), kelas yang terinfeksi dipengaruhi oleh kelas yang terpapar dan terinfeksi itu sendiri, sehingga dapat dituliskan

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = \alpha s(t)(p(t) + f(t)) - (\beta + \mu)p(t) \\ \frac{df(t)}{dt} = \beta p(t) - (\varphi + \gamma + \mu)f(t) \end{cases} \quad (4)$$

Dalam hal ini, faktor-faktor penambahan kelas terinfeksi dinotasikan dengan \mathcal{F} , sedangkan faktor-faktor yang menyebabkan kelas terinfeksi berkurang dinotasikan dengan \mathcal{V} . Sehingga Sistem (4) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{dx}{dt} = \mathcal{F} - \mathcal{V}$$

dengan

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \alpha s(t)(p(t) + f(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\beta + \mu)p(t) \\ (\varphi + \gamma + \mu)f(t) - \beta p(t) \end{pmatrix}$$

Apabila dianalisa lebih lanjut, maka didapatkan

$$K = FV^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \bar{s} & \alpha \bar{s} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta + \mu} & 0 \\ \frac{\beta}{(\beta + \mu)(\varphi + \gamma + \mu)} & \frac{1}{\varphi + \gamma + \mu} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\alpha \bar{s}(\beta + \varphi + \mu + \gamma)}{(\beta + \mu)(\varphi + \gamma + \mu)} & \frac{\alpha \bar{s}}{\varphi + \gamma + \mu} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini, bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) diperoleh dari nilai eigen terbesar dari persamaan tersebut, yakni

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha \bar{s}(\beta + \varphi + \mu + \gamma)}{(\beta + \mu)(\varphi + \gamma + \mu)}$$

Ketika nilai dari $\mathcal{R}_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit akan stabil, sehingga virus Covid-19 akan hilang dari populasi. Akan tetapi, jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka untuk titik ekuilibrium endemik akan stabil menuju nilai tertentu (akan tetap) ada. Lebih lanjut, virus Covid-19 endemik dalam suatu populasi saat waktu yang sangat lama.

Transformasi Model dan Linierisasi

Pada bagian ini, dilakukan transformasi model sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(t) &= s(t) - \bar{s}, & v(t) &= p(t) - \bar{p}, \\ w(t) &= f(t) - \bar{f}, & x(t) &= r(t) - \bar{r} \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan linierisasi menggunakan deret Taylor di sekitar titik ekuilibrium. Akibatnya, Sistem (2) menjadi

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = -b_1u(t) - b_2v(t) - b_2w(t) + \theta x(t - \tau) \\ \frac{dv(t)}{dt} = b_3u(t) + b_4v(t) + b_2w(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} = \beta v(t) - b_5w(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} = \rho u(t) + \gamma w(t) - \mu x(t) - \theta x(t - \tau) \end{cases} \tag{5}$$

dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= \mu + \rho + \alpha (\bar{e} + \bar{f}), & b_2 &= \alpha \bar{s}, & b_3 &= \alpha (\bar{e} + \bar{f}), \\ b_4 &= \alpha \bar{s} - \beta - \mu, & b_5 &= \varphi + \gamma + \mu. \end{aligned}$$

Apabila diubah dalam bentuk matriks, maka

$$\begin{aligned} &\left[\frac{du(t)}{dt}, \frac{dv(t)}{dt}, \frac{dw(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt} \right]^T \\ &= A[u(t), v(t), w(t), x(t)]^T + B[u(t - \tau), v(t - \tau), w(t - \tau), x(t - \tau)]^T \end{aligned}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_2 & 0 \\ b & b_4 & b_2 & 0 \\ 0 & \beta & -b_5 & 0 \\ \rho & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\theta \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari sistem linear tersebut adalah

$$\lambda^4 + b_{11}\lambda^3 + b_{12}\lambda^2 + b_{13}\lambda + b_{14} + (\theta\lambda^3 + b_{15}\lambda^2 + b_{16}\lambda + b_{17})e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{6}$$

dengan

$$\begin{aligned} b_6 &= \rho\theta(b_4 - b_5), & b_7 &= \rho\theta(b_4b_5 + \beta b_2) - \beta\gamma\theta b_3 \\ b_8 &= b_5 - b_4 + b_1, & b_9 &= -b_4b_5 - \beta b_2 + b_1b_5 - b_1b_4 + b_2b_3 \\ b_{10} &= -b_1b_4b_5 - b_1b_2\beta + b_2b_3b_5 + b_2b_3\beta \\ b_{11} &= b_8 + \mu, & b_{12} &= b_9 + b_8\mu, & b_{13} &= b_{10} + \mu b_9, & b_{14} &= \mu b_{10}, & b_{15} &= \theta b_8 - \rho \\ b_{16} &= \theta b_9 - b_6, & b_{17} &= b_7 + \theta b_{10} \end{aligned}$$

Setelah diperoleh persamaan karakteristik akan dikaji kestabilan lokal pada kasus dengan dan tanpa waktu tundaan.

Analisa Kestabilan Lokal

Pada subbab ini, analisa kestabilan lokal akan dibagi menjadi dua bagian, yakni kestabilan untuk kasus tanpa waktu tundaan dan dengan waktu tundaan.

1. Kestabilan Lokal Tanpa Waktu Tundaan

Ketika $\tau = 0$, akibatnya Persamaan (6) menjadi

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0$$

dengan

$$c_1 = b_{11} + \theta, c_2 = b_{12} + b_{15},$$

$$c_3 = b_{13} + b_{16}, c_4 = b_{14} + b_{17}$$

dengan menggunakan kriteria Routh - Hurwitz, kestabilan di sekitar titik ekuilibrium untuk Sistem (2) akan stabil asimtotik lokal, ketika

$$c_1 > 0, c_5 = \frac{c_1c_2 - c_3}{c_1} > 0, c_6 = c_3 > 0.$$

2. Kestabilan Lokal dengan Tundaan

Ambil substitusi $\lambda = i\omega, \omega \in \mathcal{R}_+$ dengan i merupakan bilangan imajiner dan nilai ω bergantung dengan τ . Apabila disubstitusikan ke Persamaan (6), maka didapatkan

$$\omega^4 - b_{11}\omega^3i + b_{13}\omega i + b_{14} - b_{12}\omega^2$$

$$+ (-\theta\omega^3i + b_{16}\omega i + b_{17} - b_{15}\omega^2)(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0 \quad (7)$$

Dengan memisahkan bagian real dan imajiner, kemudian kedua ruas dikuadratkan, lalu dijumlahkan, maka didapatkan

$$\omega^8 + g_1\omega^6 + g_2\omega^4 + g_3\omega^2 + g_4 = 0 \quad (8)$$

dengan

$$g_1 = b_{11}^2 - 2b_{12} - \theta^2,$$

$$g_2 = b_{12} + 2b_{14} - 2b_{11}b_{13} + 2\theta b_{16} - b_{15}^2$$

$$g_3 = b_{13}^2 - 2b_{12}b_{14} - b_{16}^2 + 2b_{15}b_{17}, g_4 = b_{14}^2 - b_{17}^2$$

Selanjutnya, dari hasil memisahkan bagian real dan imajiner, didapatkan

$$\cos(\omega\tau) = \frac{h_1h_3 - h_2h_4}{h_1^2 + h_2^2}$$

dengan

$$h_1 = \theta\omega^3 - a_{16}\omega, h_2 = a_{15}\omega^2 - a_{17},$$

$$h_3 = a_{13}\omega - a_{11}\omega^3, h_4 = \omega^4 - a_{12}\omega^2 + a_{14}$$

Sehingga

$$\tau^j = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{h_1h_3 - h_2h_4}{h_1^2 + h_2^2}\right) + \frac{2j\pi}{\omega}, j = 0, 1, 2, \dots$$

Akibatnya, nilai tundaan kritisnya adalah

$$\tau = \min\{\tau^j\}.$$

Teorema Kar :

Jika kondisi pada Persamaan (6) terpenuhi dan Persamaan (8) minimal mempunyai satu akar real positif ω_0 sehingga didapatkan nilai τ^j , maka titik ekuilibrium $(\bar{s}, \bar{p}, \bar{f}, \bar{r})$ akan stabil asimtotik lokal untuk $\tau < \tau_0$ dan untuk $\tau > \tau_0$ tidak stabil.

Dengan kata lain, akibat dari Teorema Kar tersebut, untuk titik ekuilibrium $(\bar{s}, \bar{p}, \bar{f}, \bar{r})$ di titik $\tau = \tau_0$ akan terjadi bifurkasi.

SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik menggunakan data pada tanggal 30 April 2021 sampai dengan 14 Juli 2021 dengan nilai parameter pada Tabel 2 sebagai berikut.

Tabel 2. Nilai parameter

| Notasi | Bebas Covid-19 | Endemik Covid-19 (Data real) |
|---------------|----------------|------------------------------|
| μ | | 0,2 |
| α | 0,6 | 0,9 |
| ρ | | 0,14 |
| β | 0,8 | 0,9 |
| ε | | 0,3 |
| φ | | 0,02 |
| γ | 0,89 | 0,01 |
| θ | | 0,2 |

Simulasi numerik dilakukan pada kasus bebas Covid-19 dan terjadinya penyebaran Covid-19.

Simulasi Numerik Bebas Covid-19

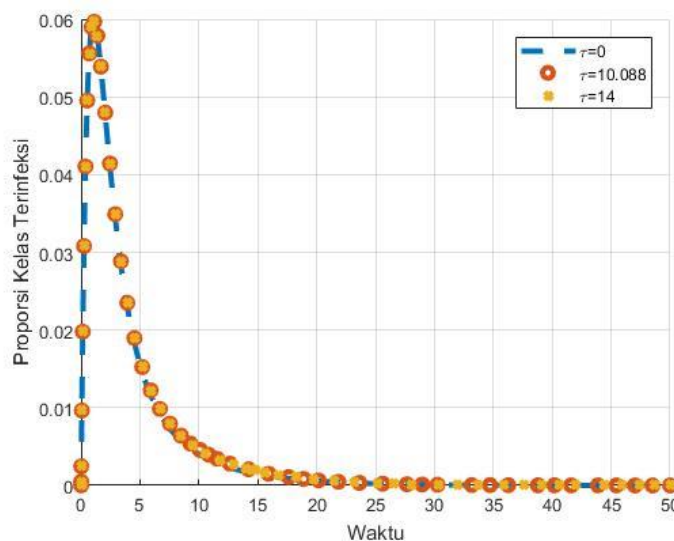
Berdasarkan Tabel 2, sehingga didapatkan nilai

$$R_0 = 0,76 < 1$$

dan nilai dari

$$c_1 = 2,06 > 0, c_5 = 1,296 > 0, c_3 = c_6 = 0,467 > 0$$

Hal ini sejalan dengan syarat kestabilan yang sudah disebutkan pada subab sebelumnya. Apabila nilai-nilai tersebut dilakukan simulasi secara numerik, maka diperoleh plot sebagai berikut.



Gambar 2. Simulasi numerik titik ekuilibrium bebas Covid-19 pada proporsi kelas terinfeksi terhadap waktu tundaan.

Berdasarkan Gambar 2 pada awal waktu, banyaknya individu yang terinfeksi Covid-19 mengalami kenaikan cukup tajam, kemudian semakin lama mengalami penurunan dan akan konvergen menuju ke nol. Dalam hal ini, waktu tundaan tidak berpengaruh signifikan terhadap individu yang terinfeksi.

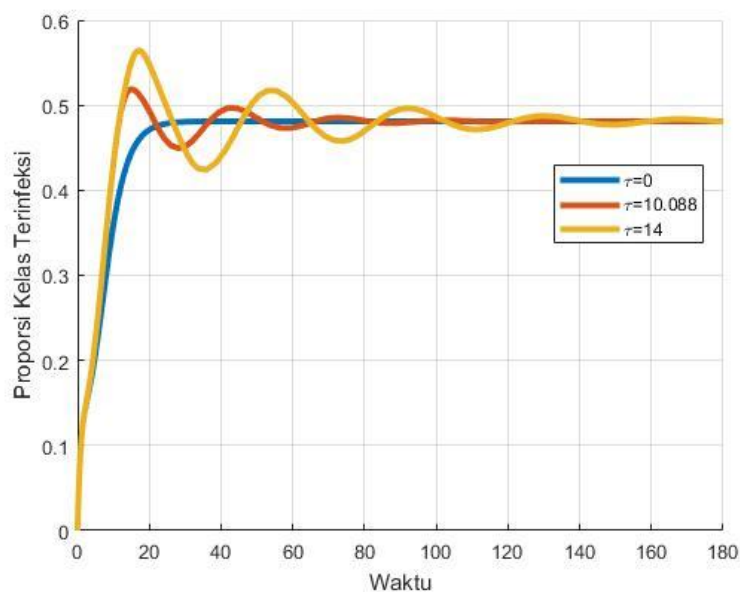
Simulasi Numerik Endemik Covid-19

Ketika nilai-nilai pada Tabel 2 disubstitusikan ke syarat kestabilan yang sudah disebutkan di subbab sebelumnya, sehingga didapatkan

$$c_1 = 2,38 > 0, c_5 = 1,50 > 0, c_3 = c_6 = 0,608 > 0$$

Sedangkan nilai dari $\mathcal{R}_0 = 2,97 > 1$, hal ini berarti bahwa untuk kasus ini terjadi endemik Covid-19.

Berikut ini simulasi yang dilakukan.



Gambar 3. Simulasi numerik titik ekuilibrium endemik Covid-19 pada proporsi kelas terinfeksi terhadap waktu tundaan.

Gambar 3 merupakan kurva penyelesaian dari titik ekuilibrium endemik COVID 19 dengan tiga waktu tundaan, yakni $\tau = 0$, $\tau = 10,088$ dan $\tau = 14$. Hal ini berarti bahwa individu yang berpindah dari kelas *recovered* ke kelas rentan memerlukan waktu $\tau = 10,088$ atau $\tau = 14$ hari. Berdasarkan kurva penyelesaian tersebut, terlihat bahwa semakin waktu tundaannya bertambah, banyaknya individu yang terinfeksi semakin tinggi dan semakin cepat. Akan tetapi, seiring dengan berjalannya waktu, untuk model tanpa atau dengan waktu tundaan, proporsi individu yang terinfeksi akan menuju ke 0,49.

Simulasi Numerik Kelas Terinfeksi Terjadinya Bifurkasi Karena Perubahan Waktu Tundaan

Pada bagian ini akan dikaji parameter waktu tundaan sehingga munculnya solusi periodik dengan parameter sesuai data namun yang divariasikan adalah waktu tundaannya. Analisa bifurkasi dilakukan secara numerik dengan melibatkan nilai parameter

$$\mu = 0,2, \alpha = 0,8, \varepsilon = 0,3, \rho = 0,14, \beta = 0,2, \varphi = 0,02, \\ \gamma = 0,89, \theta = 0,4$$

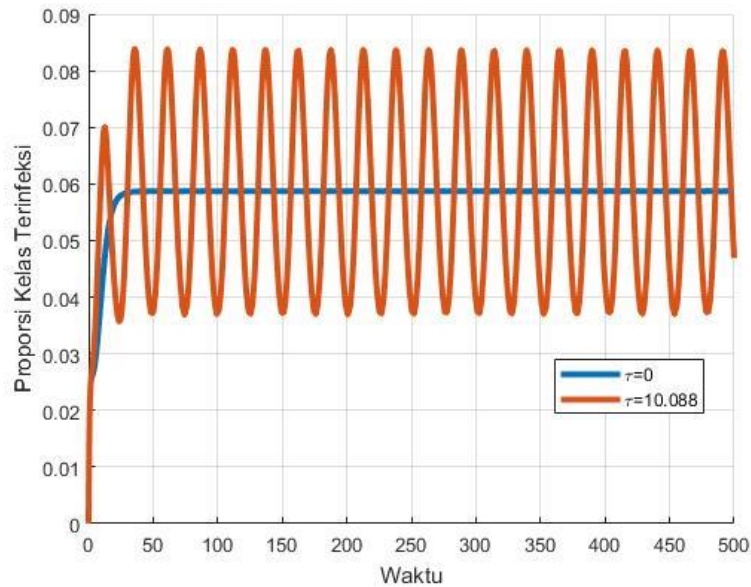
sehingga didapatkan nilai $\mathcal{R}_0 = 1,74$. Hal ini berarti bahwa bifurkasi terjadi di sekitar titik ekuilibrium endemik Covid-19. Lebih lanjut, didapatkan nilai nilai sebagai berikut

$$g_1 = 1,71, g_2 = -0,68, g_3 = -0,18, g_4 = -0,0013.$$

Dengan kata lain, minimal terdapat satu akar imajiner murni yang merupakan akar Persamaan (7). Setelah disubstitusikan data pada bagian subbab ini, diperoleh nilai

$$\omega = 0,085 \text{ dan } \tau = 10,088$$

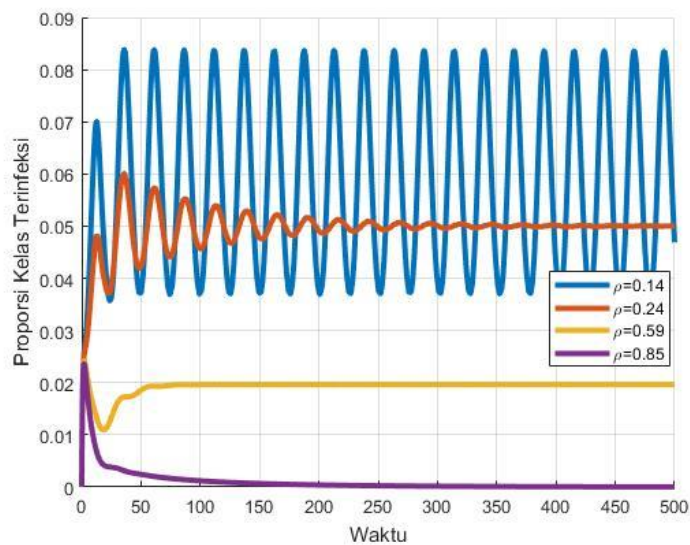
Berikut ini simulasinya



Gambar 4. Simulasi numerik untuk solusi periodik pada titik ekuilibrium endemik Covid-19.

Berdasarkan Gambar 4 terlihat bahwa proporsi kelas terinfeksi pada saat waktu tundaan 10,088 mengalami solusi periodik. Hal ini berarti, proporsi individu yang terinfeksi akan terus naik turun seiring dengan berjalannya waktu dan akan tetap mewabah dan nilainya tidak akan pernah menuju ke suatu nilai tertentu. Namun, hal yang berbeda ditunjukkan untuk kurva penyelesaian tanpa waktu tundaan, proporsi individu yang terinfeksi di awal waktu terus mengalami kenaikan, kemudian konvergen menuju suatu nilai tertentu, yakni 0,49. Artinya ada 49 dari 100 individu yang terinfeksi dan nilainya akan terus konstan di nilai tersebut.

Simulasi Numerik Perubahan Tingkat Vaksinasi Terhadap Kelas Terinfeksi



Gambar 5. Pengaruh tingkat vaksinasi (ρ) terhadap proporsi kelas terinfeksi.

Pada Gambar 5 menunjukkan bahwa ada 4 jenis perlakuan vaksin, yakni ketika tingkat vaksinasi mencapai 0,14, 0,24, 0,59 dan 0,85. Ketika tingkat vaksinansi mencapai 0,14, proporsi individu yang terjangkit Covid-19 mengalami kenaikan, kemudian turun, naik kembali, begitu seterusnya saat waktu

yang sangat panjang. Akan tetapi, perilaku yang berbeda ditunjukkan ketika tingkat vaksinasi dinaikkan menjadi 0,24. Sedangkan untuk tingkat vaksinasi mencapai 0,59, proporsi individu yang terinfeksi di awal waktu mengalami kenaikan, kemudian turun dan seiring dengan berjalannya waktu konstan menuju suatu nilai tertentu (tapi bukan nol). Hal ini berarti pengaruh vaksinasi dalam model sangat signifikan terhadap perilaku model dan dapat menurunkan proporsi individu yang terinfeksi. Akan tetapi, perilaku berbeda terlihat ketika tingkat vaksinasi 0,85, proporsi individu yang terinfeksi akan mengalami kenaikan di awal waktu dan lama kelamaan akan turun, kemudian konvergen ke nol. Artinya berdasarkan model yang dibangun dan disimulasikan dengan data di Indonesia, pandemi akan berakhir ketika tingkat vaksinasi mencapai 85%.

SIMPULAN

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan di atas, dapat disimpulkan bahwa :

1. Waktu tundaan pada model yang telah dibangun dapat menyebabkan osilasi ketika nilai $\tau = 10,088$. Hal ini berakibat pada perubahan kestabilan di sekitar titik ekuilibrium. Lebih lanjut, ketika nilai $\tau > 10,088$ dapat menyebabkan penambahan proporsi individu yang terinfeksi Covid-19 semakin tak terkendali.
2. Adanya tingkat vaksinasi (ρ) sebesar 0,14 dan waktu tundaan sebesar 10,088 dapat menyebabkan proporsi individu yang terinfeksi Covid-19 mengalami osilasi. Hal ini berarti bahwa, banyaknya penderita Covid-19 akan selalu ada dan di interval waktu tertentu akan mengalami kenaikan, lalu menurun, sehingga akan berosilasi. Akan tetapi, ketika tingkat vaksinasi diperbesar, proporsi individu yang terinfeksi Covid-19 akan mengalami penurunan.

Kajian terkait waktu tundaan dapat diaplikasikan pada model Covid-19. Pada kajian ini vaksinasi dilakukan pada vaksin yang kedua. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan untuk adanya vaksin *booster* dan berapa kali vaksin *booster* sebaiknya dilakukan.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmadi, A., & Widodo, W. (2020). Local stability of malware propagation model on network computer with two time delay. *AIP Conference Proceedings* 2296, 020087. <https://doi.org/10.1063/5.0030321>.
- Raza, A., Ahmadian, A., Rafiq, M., Salahshour, S., Naveed, M., Ferrara, M., Soori, A. H. (2020). Modeling the effect of delay strategy on transmission dynamics of HIV/AIDS disease. *Advances in Difference Equations*, 663. <https://doi.org/10.1186/s13662-020-03116-8>.
- Chukwu, C. W., Fatmawati, F. (2022). Modelling fractional-order dynamics of COVID-19 with environmental transmission and vaccination: a case study of Indonesia. *AIMS Mathematics*, 7(3), 4416-4438. <https://doi.org/10.3934/math.2022246>
- Chen, T. M., Rui, J., Wang, Q. P., Zhao, Z. Y., Cui, J. A., Yin, L. (2020). A mathematical model for simulating the phase-based transmissibility of a novel coronavirus. *Infectious Disease of Poverty*, 9(24), 1-8. <https://doi.org/10.1186/s40249-020-00640-3>
- Eikenberry, S. E., Mancuso, M., Iboi, E., Phan, T., Eikenberry, K., Kuang, Y., Kostelich, E., Gumel, A. B. (2020). To mask or not to mask: Modeling the potential for face mask use by the general public to curtail the COVID-19 pandemic. *Infectious Disease Modelling*, 5, 293-308. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2020.04.001>
- Saptaningtyas, F. Y., Prihantini, P. (2018). Stability analysis model of Bacillus antracis using SEIQR population compartment with quarantine in Indonesia. *Journal of Physics: Conference Series*, 983, 012088. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/983/1/012088>
- Gilbert, M., Pullano, G., Pinotti, F., Valdano, E., Poletto, C., Boëlle, P. Y., D'Ortenzio, E., Yazdanpanah, Y., Eholie, S. P., Altman, M., Gutierrez, B., Kraemer, M. U. G., Colizza, V. (2020). Preparedness and vulnerability of African countries against importations of COVID-19: a modelling study. *The Lancet*, 395, 871-877. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30411-6](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30411-6)

- Iboi, E., Sharomi, O. O., Ngonghala, C., Gumel, A. B. (2020). Mathematical modeling and analysis of COVID-19 pandemic in Nigeria. *MedRxiv*. <https://doi.org/10.1101/2020.05.22.20110387>
- (ga ada di text) Kar, T. K. (2003). Selective harvesting in a prey-predator fishery with time delay. *Mathematical and Computer Modelling*, 38(3-4), 449-458. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(03\)90099-9](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(03)90099-9)
- Musa, S. S., Qureshi, S., Zhao, S., Yusuf, A., Mustapha, U. T., He, D. (2021). Mathematical modeling of COVID-19 epidemic with effect of awareness programs. *Infectious Disease Modelling*, 6, 448-460. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2021.01.012>
- Ngonghala, C. N., Iboi, E., Eikenberry, S., Scotch, M., MacIntyre, C. R., Bonds, M. H., Gumel, A. B. (2020). Mathematical assessment of the impact of non-pharmaceutical interventions on curtailing the 2019 novel Coronavirus. *Mathematical Biosciences*, 325, 108364. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2020.108364>
- Nuraini, N., Sukandar, K. K., Hadisoemarto, P., Susanto, H., Hasan, A. I., Sumarti, N. (2021). Mathematical models for assessing vaccination scenarios in several provinces in Indonesia. *Infectious Disease Modelling*, 6, 1236-1258. <https://doi.org/10.1016/j.idm.2021.09.002>
- Devipriya, R., Dhamodharavadhani, S., Selvi, S. (2021). SEIR model for covid-19 epidemic using delay differential equation. *Journal of Physics: Conference Series*, 1767 012005. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1767/1/012005>
- Saidi, S., Herawati, N., Nisa, K. (2021). Modeling with generalized linear model on covid-19: Cases in Indonesia. *International Journal of Electronics and Communications System*, 1(1), 25-32. <http://ejournal.radenintan.ac.id/index.php/IJECS/article/view/9299>
- Sugianto, S., Abrori, M. (2020). A mathematical model of the covid-19 cases in Indonesia (under and without lockdown enforcement). *Biology, Medicine, & Natural Product Chemistry*, 9(1), 15-19. <https://doi.org/10.14421/biomedich.2020.91.15-19>
- Annas, S., Pratama, M. I., Rifandi, M., Sanusi, W., Side, S. (2020). Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 11007. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110072>
- Tang, B., Wang, X., Li, Q., Bragazzi, N. L., Tang, S., Xiao, Y., Wu, J. (2020). Estimation of the transmission risk of the 2019-nCoV and its implication for public health interventions. *Journal of Clinical Medicine*, 9(2), 462. <https://doi.org/10.3390/jcm9020462>
- Wu, J. T., Leung, K., Leung, G. M. (2020). Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study. *The Lancet*, 395(10225), 689-697. [https://doi.org/10.1016/S0140-6736\(20\)30260-9](https://doi.org/10.1016/S0140-6736(20)30260-9)
- Wu, P., Hao, X., Lau, E. H. Y., Wong, J. Y., Leung, K. S. M., Wu, J. T., Cowling, B. J., Leung, G. M. (2020). Real-time tentative assessment of the epidemiological characteristics of novel coronavirus infections in Wuhan, China, as at 22 January 2020. *Eurosurveillance*, 25(3), 2000044. <https://doi.org/10.2807/1560-7917.ES.2020.25.3.2000044>
- Yang, C., Yang, Y., Li, Z., Zhang, L. (2021). Modelling and analysis of COVID-19 base on a time delay dynamic model. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 18(1), 154-165. <https://doi.org/10.3934/mbe.2021008>
- Yang, H. M., Lombardi Junior, L. P., Castro F. F. M., Yang A. C. (2021). Mathematical modeling of the transmission of SARS-CoV-2—evaluating the impact of isolation in São Paulo State (Brazil) and lockdown in Spain associated with protective measures on the epidemic of CoViD-19. *PLoS ONE*, 16(6), e0252271. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0252271>