Available online at: http://journal.uny.ac.id/index.php/pythagoras
PYTHAGORAS: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 17 (1), 2022, 293-307

Struktur Aljabar Koszul pada Aljabar Lie $M_{3,1}(\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$

Nur Hafizhah [1], Edi Kurniadi [1*], Ema Carnia [1]
[1] Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran, Indonesia
* Corresponding Author. E-mail: edi.kurniadi@unpad.ac.id

ARTICLE INFO

Article History:
Received: 28-Mar. 2021
Revised: 01-Aug. 2022
Accepted: 26-Sep.2021

Keywords:
Aljabar Lie,
aljabar Lie Frobenius,
aljabar Koszul.

ABSTRACT

Dalam penelitian ini dipelajari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(3)$ berdimensi 12 yang merupakan jumlah semi langsung dari ruang vektor matriks berukuran 3×1 dan aljabar Lie matriks berukuran 3×3. Tujuan penelitian ini adalah untuk membuktikan eksistensi dan struktur aljabar koszul pada aljabar Lie $\mathfrak{aff}(3)$. Aljabar Lie tersebut adalah aljabar Lie Frobenius. Oleh karena itu, terdapat suatu fungsional linear yang mengakibatkan nilai fungsional linear pada matriks strukturnya tidak sama dengan nol. Fungsional linear yang demikian ini disebut fungsional Frobenius. Dalam penelitian ini diberikan juga bagaimana mendapatkan matriks struktur, menghitung determinannya serta memilih fungsional Frobenius yang tepat. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini adalah rumus eksplisit struktur aljabar koszul pada aljabar Lie affine berdimensi 12 melalui induksi pada bentuk simplektik dari fungsional Frobeniusnya. Sebagai bahan diskusi untuk penelitian selanjutnya, hasil yang diperoleh dapat dikembangkan untuk menentukan struktur aljabar koszul pada aljabar Lie affine berdimensi $n(n+1)$.

In this research, we study the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(3)$ of dimension 12 which is a h is the semi-direct sum of the vector space of a matrix of 3×1 and Lie algebra of a matrix of 3×3. The research aims to prove the existence and structure of koszul algebras on the affine Lie algebra $\mathfrak{aff}(3)$. Since its Lie algebra is Frobenius then there exists a linear functional whose values in the matrix structure are not equal to zero. Such a linear functional is called a Frobenius functional. Furthermore, in this study, it is also given how to obtain the structure matrix, to calculate its determinants, and to choose the right Frobenius functional. The results obtained in this study are explicit formulas for the structure of the koszul algebra on 12-dimensional Lie affine algebra through induction in the symplectic form of its Frobenius functional. As a discussion material for further research, the results obtained can be developed to determine the structure of koszul algebra in affine Lie algebra of dimension $n(n+1)$.

SCAN ME

How to Cite:
Hafizhah, N., Kurniadi, E., & Carnia, E. (2022). Struktur aljabar koszul pada aljabar Lie $M_{3,1}(\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika, 17*(1), 293-307. https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i1.39713

https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i1.39713

PENDAHULUAN

Aljabar Lie diperkenalkan pada akhir abad ke-19 oleh Sophus Lie yang merupakan matematikawan asal Norwegia. Secara garis besar, aljabar Lie adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ yang dilengkapi oleh *bracket* Lie. Konstruksi aljabar Lie sendiri bisa diperoleh dari grup Lie G dengan menentukan semua *left-invariant vektor field*-nya. Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ sendiri dapat ditinjau dari jenis-jenis kelasnya seperti kita mengenal adanya aljabar Lie nilpoten, aljabar Lie Frobenius, dan aljabar Lie kontak. Kelas-kelas tersebut tentunya menarik untuk dipelajari baik dari konteks aljabar Lie-nya sendiri atau bersama-sama dengan grup Lie-nya. Di sisi lain, kita juga dapat mempelajari keterkaitan antara kelas aljabar Lie satu dengan lainnya. Sebagai contoh, aljabar Lie Frobenius adalah aljabar Lie yang tidak pernah nilpoten dan bersifat *non-unimodular* tetapi aljabar Lie Frobenius ini dapat dikonstruksi dari aljabar Lie Heisenberg yang merupakan kelas aljabar Lie nilpoten (Kurniadi et al., 2021). Penelitian-penelitian tentang aljabar Lie sudah banyak dilakukan para peneliti misalnya tentang trigonometri, *affine,* dan verteks aljabar Lie (Li & Wang, 2020), representasi aljabar Lie khususnya aljabar Lie Heisenberg (Muraleetharan et al., 2017) dan teori aljabar Lie semi-sederhana atas *algebraically closed field* dengan karakteristik 0, dengan penekanan pada representasinya (Humphreys, 1972).

Lebih khusus lagi, penelitian-penelitian tentang aljabar Lie mengerucut pada kelas-kelas aljabar Lie yang sudah disebutkan di atas yaitu aljabar Lie nilpoten, aljabar Lie Frobenius, dan aljabar Lie kontak. Para peneliti sudah banyak mempelajari kelas aljabar Lie nilpoten tersebut misalnya kita menemukan kajian tentang 2-*capabilty* dan 2-*multiplier* pada aljabar Lie nilpoten (Niroomand & Parvizi, 2017), klasifikasi aljabar Lie nilpoten berdimensi 6 (Graaf, 2007), dan orbit *coadjoint* nilpoten (Xue, 2014). Kelas aljabar Lie nilpoten yang paling banyak diteliti adalah aljabar Lie Heisenberg berdimensi $(2n+1)$ (Szechtman, 2014), dimana aljabar Lie Heisenberg ini memberikan sumbangsih besar dalam mempelajari teori representasi grup Lie (Kirillov, 2004). Di sisi lain, kajian tentang orbit *coadjoint* dari suatu grup Lie G memberikan keterkaitan dengan aljabar Lie Frobenius. Dengan kata lain, aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dari grup Lie G dikatakan Frobenius jika orbit *coadjoint*-nya buka di ruang dual dari $\mathfrak{g}$ (Pham, 2016). Pernyataan terakhir juga ekuivalen dengan *stabilizer* dari aljabar Lie Frobenius yang bersifat trivial (Ooms, 1980). Lebih jauh, jika aljabar Lie $\mathfrak{g}$ Frobenius maka *alternating bilinear form*-nya *non-degenerate* (Alvarez et al., 2018). Hal ini menarik, karena kita bisa menentukan suatu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ apakah bersifat Frobenius atau tidak dengan menyelidiki determinan matriks representasi dari matriks *alternating bilinear form*-nya. Dalam hal ini, aljabar Lie $\mathfrak{g}$ Frobenius jika determinan matriks *alternating bilinear form*-nya tidak sama dengan nol.

Salah satu contoh aljabar Lie Frobenius adalah aljabar Lie *affine* yang dinotasikan oleh $\mathfrak{aff}(n) := \mathbb{R}^n \rtimes \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ di mana $\mathbb{R}^n$ adalah ruang vektor real berdimensi n dan $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ adalah aljabar Lie dari ruang matriks berukuran $n \times n$. Hasil-hasil tentang aljabar Lie $\mathfrak{aff}(n)$ dengan $n = 1, 2$ sudah banyak diperoleh. Hasil tersebut misalnya tentang turunan aljabar Lie *affine* yang senantiasa *inner* (Gerstenhaber & Giaquinto, 2009), aljabar Lie Frobenius berdimensi 6 (Csikós & Verhóczki, 2007), elemen utama aljabar Lie Frobenius (Diatta & Manga, 2014). Pada penelitian ini, penulis mempelajari aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(3) := M_{3,1}(\mathbb{R}) \rtimes \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$ dengan $M_{3,1}(\mathbb{R})$ isomorfik dengan $\mathbb{R}^3$. Penulis membuktikan bahwa terdapat fungsional linear sehingga $\mathfrak{aff}(3)$ adalah aljabar Lie Frobenius. Hal ini sangat penting karena hasil yang kami peroleh dapat memvalidasi hasil yang diperoleh sebelumnya sehingga dapat diperluas untuk kasus aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(n)$ secara umum sebagai aljabar Lie Frobenius. Selain validasi hasil $\mathfrak{aff}(n)$ dengan $n = 1,2$, alasan lainnya mengapa dipilih aljabar Lie $\mathfrak{aff}(3)$ karena $\mathfrak{aff}(3)$ bisa melengkapkan contoh aljabar Lie Frobenius *affine* berdimensi lebih dari 6. Penulis menekankan kembali bahwa dimensi aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(n)$ adalah $n(n+1)$.

Penelitian lainnya untuk kasus aljabar Lie Frobenius adalah aljabar Lie Frobenius real berdimensi 4 yang telah dipelajari secara intensif oleh Kurniadi dan Ishi (2019) yaitu diperoleh hasil bahwa representasi grup Lie dari aljabar Lie Frobenius berdimensi 4 mempunyai representasi unitar tak tereduksi yang bersifat *square-integrable representations*. Selain itu, dalam disertasi Kurniadi (2019) telah dibuktikan juga bahwa aljabar Lie $\mathfrak{sim}(n) := \mathbb{R}^n \rtimes (\mathbb{R}_+ \oplus \mathfrak{so}(n))$ dari *similitude Lie group* $\mathrm{Sim}(n) := \mathbb{R}^n \rtimes (\mathbb{R}_+ \times \mathrm{SO}(n))$ adalah aljabar Lie Frobenius untuk $n \leq 2$ dan untuk $n > 2$ $\mathfrak{sim}(n)$ bukan aljabar Lie Frobenius.

Di sisi lain, beberapa peneliti sudah mengkaji aljabar koszul pada suatu aljabar Lie (Burde, 2015). Aljabar koszul ini dinamakan juga dengan aljabar Vinbeg, aljabar simetrik kiri, dan aljabar *quasi-associative* (Burde, 2015). Struktur aljabar koszul pada aljabar Lie Frobenius khususnya pada aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(1)$ berdimensi 2 juga sudah diperoleh (Diatta & Manga, 2014). Lebih jauh, struktur koszul untuk $\mathfrak{aff}(2)$ telah diteliti oleh Hendrawan (2020). Dalam penelitian ini, setelah dibuktikan bahwa $\mathfrak{aff}(3)$ adalah aljabar Lie Frobenius, dipelajari juga struktur aljabar koszul untuk $\mathfrak{aff}(3)$.

METODE

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur tentang aljabar Lie Frobenius dan aljabar koszul. Pertama-tama dibuktikan bahwa $\mathfrak{aff}(3)$ merupakan aljabar Lie Frobenius dengan mencari Pfaffian dari matriks *bracket* $\mathfrak{aff}(3)$ dan memilih fungsional Frobeniusnya sedemikian sehingga *stabilizer* dari $\mathfrak{aff}(3)$ di titik fungsional linear tersebut sama dengan himpunan nol. Selanjutnya, dicari struktur aljabar koszul pada $\mathfrak{aff}(3)$ dengan cara menginduksi bentuk simplektiknya menggunakan persamaan $\omega(u * v, w) = -\omega(v, [u,w]) (u, v, w \in \mathfrak{aff}(3))$ (Diatta et al., 2020). Struktur yang didapat menunjukkan bahwa $\mathfrak{aff}(3)$ adalah aljabar koszul. Sebelum masuk dalam hasil dan pembahasan, dalam bagian ini dibahas tentang teori dasar seperti aljabar Lie, aljabar Lie Frobenius, dan aljabar koszul.

Definisi 1 (McInerney, 2013). *Misalkan V ruang vektor real. Didefinisikan himpunan V^* adalah himpunan semua pemetaan linear dari V ke $\mathbb{R}$. Dengan kata lain,*

$$V^* = \{T: V \to \mathbb{R}\ ;\ T \text{ pemetaan linear}\}. \tag{1}$$

V^* dikatakan ruang dual dari V dan anggota dari V^* disebut vektor dual atau fungsional linear.

Definisi 2 (McInerney, 2013). *Misalkan $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ adalah basis untuk ruang vektor real V. Himpunan $B^* = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ disebut basis ruang dual V^* relatif terhadap basis B, di mana $E_i : V \to \mathbb{R}\, (i = 1,2, \dots, n)$ adalah pemetaan linear yang didefinisikan sebagai*

$$E_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}. \tag{2}$$

Konsep pemetaan linear pada suatu ruang vektor dapat diperluas untuk pemetaan bilinear yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3 (McInerney, 2013). *Misalkan V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Pemetaan $T: V \times V \to \mathbb{R}$ disebut pemetaan bilinear jika memenuhi:*

1. $T(x + y, z) = T(x, z) + T(y, z), \forall x, y, z \in V$
2. $T(\alpha x, y) = \alpha T(x, y), \forall x, y \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya diperkenalkan notasi *linear symplectic form* pada suatu ruang vektor sebagai berikut:

Definisi 4 (McInerney, 2013). *Misalkan V suatu ruang vektor real. Pemetaan $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ dikatakan linear symplectic form* jika memenuhi:

(1) *ω adalah pemetaan bilinear pada V;*
(2) *ω adalah skew-symmetric: $\forall v, w \in V, \omega(w, v) = -\omega(v, w)$;*
(3) *ω adalah non-degenerate: Jika $v \in V$ memiliki sifat $(v, w) = 0\ \forall w \in V$, maka $v = 0$.*

Ruang vektor V yang dilengkapi dengan *linear symplectic form* disebut ruang vektor simplektik dan pemetaan bilinear ω dikatakan *alternating bilinear form* pada V jika memenuhi (1) dan (2). Lebih jauh, struktur yang sudah diperoleh pada ruang vektor tersebut dapat kita terapkan pada struktur aljabar lainnya yaitu pada aljabar Lie. Secara formal dituliskan definisi aljabar Lie sebagai berikut :

Definisi 5 (Humphreys, 1980). *Ruang vektor $\mathfrak{g}$ atas lapangan real yang dilengkapi dengan pemetaan bilinear $[-,-] :\ \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (x, y) \mapsto [x, y] \in \mathfrak{g}$, selanjutnya disebut bracket dari x dan y, dikatakan aljabar Lie atas lapangan real jika memenuhi aksioma berikut ini:*

1. $[x, x] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$.
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ *(Identitas Jacobi).*

Sebagai contoh, dapat dibuktikan bahwa ruang vektor $\mathbb{R}^3$ dengan *bracket* Lie-nya adalah hasil kali silang adalah aljabar Lie. Selanjutnya, ruang matriks $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ yang memuat semua matriks berukuran $n \times n$ adalah aljabar Lie dengan *bracket* Lie-nya adalah matriks komutator. Khusus untuk ruang matriks $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, aljabar Lie-nya dinotasikan oleh $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie dan $\Sigma \in \mathfrak{g}^*$ fungsional linearnya. Didefinisikan *alternating bilinear form* pada $\mathfrak{g}$ berkorespondensi dengan Σ sebagai berikut :

$$F_\Sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (r, s) \mapsto F_\Sigma(r, s) = \langle \Sigma, [r, s] \rangle \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Stabilizer dari $\mathfrak{g}$ pada titik Σ diberikan sebagai kernel atau dari inti dari persamaan (3). Dengan kata lain diperoleh

$$\text{Ker } F_\Sigma = \mathfrak{stab}_F(\mathfrak{g}) = \{r \in \mathfrak{g}\,;\, \langle \Sigma, [r,s] \rangle = 0, \forall s \in \mathfrak{g}\}. \quad (4)$$

Berikutnya diperkenalkan notasi aljabar Lie Frobenius. Kelas aljabar Lie Frobenius sangat penting untuk dipelajari karena kelas tesebut muncul dalam area penting matematika seperti muncul dalam solusi konstan persamaan *Yang-baxter*, *simple hypersurface singularities*, dan *bounded homogeneous bounded domains* (Ooms, 2009). Dalam teori ring dan modul, syarat perlu dan cukup agar aljabar Lie hingga bersifat Frobenius adalah *universal enveloping algebra*-nya bersifat primitif yaitu mempunya modul yang bersifat eksak sederhana.

Definisi 6 (Alvarez et al., 2018). *Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie atas lapangan $\mathbb{R}$. Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan aljabar Lie Frobenius jika terdapat fungsional linear $\Sigma \in \mathfrak{g}^*$ sedemikian sehingga stabilizer dalam persamaan (4) trivial yaitu $\mathfrak{stab}_F(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Fungsional linear yang demikian disebut dengan fungsional Frobenius.*

Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie yang grup Lie-nya adalah G. Misalkan G beraksi pada $\mathfrak{g}$ melalui *adjoint* yang dinotasikan oleh Ad. Dual dari aksi *adjoint* ini disebut aksi *coadjoint* dinotasikan oleh Ad^* yaitu aksi dari grup Lie G pada aljabar Lie $\mathfrak{g}^*$. Himpunan semua aksi *coadjoint* pada suatu titik $\Sigma \in \mathfrak{g}$ disebut orbit *coadjoint* dan dinyatakan sebagai berikut:

$$\Theta_\Sigma := \{\text{Ad}^*(g)\Sigma\,;\; g \in G\} \subseteq \mathfrak{g}^*. \quad (5)$$

Perhatikan bahwa Θ_Σ isomorfik dengan G/G_Σ dengan aljabar Lie G_Σ sama dengan $\mathfrak{stab}_F(\mathfrak{g})$. Perhatikan bahwa $\Theta_\Sigma \subseteq \mathfrak{g}^*$ buka jika dan hanya jika $\mathfrak{stab}_F(\mathfrak{g}) = \{0\}$ (Csikós & Verhóczki, 2007). Menurut definisi 6, pernyataan tersebut ekuivalen dengan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie Frobenius. Oleh karena itu, dimensi aljabar Lie Frobenius selalu genap.

Misalkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}\}$ basis untuk aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}$. Matriks yang semua entrinya terdiri dari bracket $[x_i, x_j]$ disebut dengan matriks struktur, dinotasikan oleh M, dan bersifat *skew-symmetric.* Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dikatakan Frobenius jika determinan matriks M tidak sama dengan nol. Selanjutnya untuk suatu $\Sigma \in \mathfrak{g}^*$ matriks M dapat dikaitkan dengan Σ untuk setiap entrinya. Matriks tersebut dinamakan matriks struktur dual dan dinotasikan oleh $[\langle M, \Sigma \rangle] = [M(\Sigma)]$.

Berkaitan dengan matriks M yang bersifat *skew-symmetric,* diperkenalkan notasi Pfaffian sebagai berikut:

Definisi 7 (Austin et al., 2007). *Pfaffian dari matriks skew-symmetric A berukuran $2n \times 2n$ didefinisikan sebagai*

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\pi \in S_{2n}} sgn(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{\pi(2i-1)\pi(2i)} \quad (6)$$

dimana S_{2n} merupakan himpunan semua permutasi pada $\{1,2,\dots,2n\}$. Tanda permutasi diberikan oleh $sgn(\pi) = (-1)^{inv(\pi)}$.

Proposisi 8 (Austin et al., 2007). $\text{Pf}(A)^2 = \det A$, *dimana A adalah matriks skew-symmetric berukuran $2n \times 2n$.*

Contoh 9 Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie yang bracketnya diberikan oleh $[\alpha, a] = a$, diperoleh matriks $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. Dengan menggunakan definisi 7 dapat dicari Pfaffian dari M sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Pf}(M) &= \frac{1}{2^1 1!} \sum_{\pi \in S_2} sgn(\pi) \prod_{i=1}^{2} a_{\pi(2i-1)\pi(2i)} = \frac{1}{2}\big(sgn(\pi)a_{12} + sgn(\pi)(a_{21})\big) \\ &= \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) = \frac{1}{2}\big(a - (-a)\big) = \frac{1}{2}(2a) = a.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, dapat definisikan Pfaffian aljabar Lie $\mathfrak{g}$ sebagai $\text{Pf}_{\mathfrak{g}} := \text{Pf}(M) = a$.

Contoh 10 (Pham, 2016). Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie berdimensi 4 dengan basis $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ dan *bracket* tak nolnya diberikan sebagai berikut:

$$[x_1, x_2] = \frac{1}{2}x_2 + x_3,\ [x_1, x_3] = \frac{1}{2}x_3,\ [x_1, x_4] = x_4,\ [x_2, x_3] = x_4. \tag{7}$$

Kemudian, dapat ditunjukkan bahwa $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie Frobenius dengan mencari determinan dari matriks *bracket*. Matriks *bracket* dapat ditulis sebagai

$$M = \begin{pmatrix} [x_1, x_1] & [x_1, x_2] & [x_1, x_3] & [x_1, x_4] \\ [x_2, x_1] & [x_2, x_2] & [x_2, x_3] & [x_2, x_4] \\ [x_3, x_1] & [x_3, x_2] & [x_3, x_3] & [x_3, x_4] \\ [x_4, x_1] & [x_4, x_2] & [x_4, x_3] & [x_4, x_4] \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa determinan matriks M tidak sama dengan nol.

$$\begin{aligned} \det(M) &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}x_2 + x_3 & \frac{1}{2}x_3 & x_4 \\ -\frac{1}{2}x_2 - x_3 & 0 & x_4 & 0 \\ -\frac{1}{2}x_3 & -x_4 & 0 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= {x_4}^4 \end{aligned}$$

Jadi, $\det(M) = {x_4}^4 \neq 0$. Karena $\det(M) \neq 0$ maka $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Selanjutnya, akan ditunjukkan kembali bahwa $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie Frobenius dengan menggunakan pernyataan ekuivalen yang lain pada definisi 7, yaitu dengan mencari Pfaffiannya. Pfaffian dari aljabar Lie Frobenius $\mathfrak{g}$ didefinisikan sebagai Pfaffian dari matriks $M([x_i, x_j])$ dan dinotasikan oleh $\mathrm{Pf}(\mathfrak{g})$. Dapat diperoleh hasil dari $\mathrm{Pf}(\mathfrak{g})$ dengan menggunakan proposisi 8 yaitu $\mathrm{Pf}(\mathfrak{g}) = {x_4}^2$. Misalkan $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ merupakan basis bagi $\mathfrak{g}$. Fungsional Frobenius dapat dipilih dari $S^* \coloneqq \{x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\}$ yang berkorespondensi dengan $\mathrm{Pf}(\mathfrak{g}) = {x_4}^2$. Dalam hal ini, dipilih fungsional Frobenius tersebut yaitu x_4^*. Untuk menunjukkan bahwa x_4^* adalah fungsional Frobenius untuk $\mathfrak{g}$, maka akan dicari determinan $M\left(x_4^*([x_i, x_j])\right)$. Misalkan $\omega(x, y) = x_4^*([x, y])$ dimana $x, y \in \mathfrak{g}$ dan $x_4^* \in \mathfrak{g}^*$ yang didefinisikan sebagai

$$x_4^*(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 4 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}. \tag{8}$$

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\det\left(M\left(x_4^*([x_i, x_j])\right)\right) \neq 0$

$$\begin{aligned} \det\left(M\left(x_4^*([x_i, x_j])\right)\right) &= \begin{vmatrix} x_4^*(0) & x_4^*\left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right) & x_4^*\left(\frac{1}{2}x_3\right) & x_4^*(x_4) \\ x_4^*\left(-\frac{1}{2}x_2 - x_3\right) & x_4^*(0) & x_4^*(x_4) & x_4^*(0) \\ x_4^*\left(-\frac{1}{2}x_3\right) & x_4^*(-x_4) & x_4^*(0) & x_4^*(0) \\ x_4^*(-x_4) & x_4^*(0) & x_4^*(0) & x_4^*(0) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, $\det\left(M\left(x_4^*([x_i, x_j])\right)\right) = 1 \neq 0$. Karena $\det\left(M\left(x_4^*([x_i, x_j])\right)\right) \neq 0$ maka $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie Frobenius.

Berikutnya diperkenalkan notasi *semidirect sum.* Notasi tersebut dapat dinyatakan ke dalam definisi berikut:

Definisi 11 (Hilgert & Neeb, 2012)**.** *Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie. Pemetaan linear $\delta: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ disebut derivasi jika*

$$\delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)], \forall x, y \in \mathfrak{g}. \tag{9}$$

Himpunan dari semua derivasi dilambangkan dengan $der(\mathfrak{g})$.

Definisi 12 (Hilgert dan Neeb, 2012)**.** *Misalkan $\mathfrak{g}$ aljabar Lie dan $X \in \mathfrak{g}$. Maka identitas Jacobi sebagai pemetaaan yang diberikan oleh*

$$\mathrm{ad}(x): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad y \mapsto [x, y] \tag{10}$$

adalah derivasi.

Derivasi dalam bentuk ini disebut *inner derivations.* Pemetaan $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ disebut representasi adjoint.

Definisi 13 (Hilgert & Neeb, 2012)**.** *Misalkan $\mathfrak{n}$ dan $\mathfrak{h}$ aljabar Lie dan*

$$\alpha: \mathfrak{h} \to der(\mathfrak{n}) \tag{11}$$

homomorfisma. Maka direct sum $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ dari ruang vektor $\mathfrak{n}$ dan $\mathfrak{h}$ adalah aljabar Lie terhadap bracket

$$[(x, y), (x', y')] := (\alpha(y)x' - \alpha(y')x + [x, x'], [y, y']) \tag{12}$$

untuk $x, x' \in \mathfrak{n}$, $y, y' \in \mathfrak{h}$. Aljabar Lie ini disebut semidirect sum terhadap α dari $\mathfrak{n}$ dan $\mathfrak{h}$, dilambangkan dengan $\mathfrak{n} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$. Jika $\alpha = 0$, maka $\mathfrak{n} \rtimes_\alpha \mathfrak{h}$ disebut direct sum dari $\mathfrak{n}$ dan $\mathfrak{h}$, dan dilambangkan dengan $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$.

Contoh 14 (Diatta dan Manga, 2014). Aljabar Lie *affine* berdimensi 2, dinotasikan oleh $\mathfrak{aff}(1)$ adalah *semidirect sum* antara $\mathbb{R}$ dengan $\mathbb{R}_+$ yaitu $\mathfrak{aff}(1) := \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}_+$. Elemen dari $\mathfrak{aff}(1)$ dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Dengan *bracket* $[A, B] = AB - BA$. Misalkan basis standar dari $\mathfrak{aff}(1)$ yaitu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

atau dapat ditulis sebagai $A = (x, y) = (0,1)$ dan $B = (x', y') = (1,0)$. Misal α adalah konjugasi yang diberikan oleh

$$\alpha(y)x' = yx'y^{-1} \text{ dan } \alpha(y')x = y'x(y')^{-1}. \tag{15}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (12) pada definisi 13 dapat ditentukan bracket sebagai berikut:

$$[A, B] = (\alpha(y)x' - \alpha(y')x + [x, x'], [y, y']) = (1 - 0 + 0,0) = (1,0) = B. \tag{16}$$

Notasi terakhir yang dibahas di sini adalah aljabar koszul yang dinyatakan sebagai berikut:

Definisi 15 (Diatta dan Manga, 2014). *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *dikatakan aljabar koszul jika bilinear product yang didefinisikan oleh* $*:\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\ni(a,b)\mapsto a*b\in\mathfrak{g}$ *memenuhi kondisi berikut ini:*

1. $(x*y)*z-x*(y*z)=(y*x)*z-y*(x*z), \forall x,y,z\in\mathfrak{g}$.
2. $[x,y]=x*y-y*x$.

HASIL PENELITIAN

Aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(3)$ adalah aljabar Lie berdimensi 12 dengan barcket Lie-nya adalah matriks komutator. Bentuknya dapat dinyatakan sebagai *semidirect sum* antara ruang vektor matriks 3×1 $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dengan aljabar Lie matriks 3×3 $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$. Dengan kata lain, bentuk *semidirect sum*-nya dapat dinyatakan dalam formula $\mathfrak{aff}(3)=M_{3,1}(\mathbb{R})\rtimes\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$. Perhatikan bahwa aljabar Lie $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$ beraksi pada ruang matriks $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dengan aksi $A.x=Ax, A\in\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}), x\in M_{3,1}(\mathbb{R})$ dimana Ax adalah perkalian matriks biasa. Selanjutnya elemen-elemen aljabar Lie *affine* $\mathfrak{aff}(3)$ ini dapat dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 0\end{pmatrix}, A\in\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}), v\in M_{3,1}(\mathbb{R}) \tag{17}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right), a,b,\dots,i,x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{18}$$

Misalkan $S=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10},x_{11},x_{12}\}$ basis untuk $\mathfrak{aff}(3)$. Dengan menggunakan basis standar untuk $M_{3,1}(\mathbb{R})$ dan $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$ maka elemen-elemen $x_i, 1\le i\le 12$ pada basis S dapat dinyatakan secara eksplisist sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\
x_4 &= \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_5 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_6 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\
x_7 &= \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_8 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_9 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\
x_{10} &= \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_{11} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, x_{12} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Bracket pada aljabar Lie $\mathfrak{aff}(3)$ dapat dihitung menggunakan komutator matriks yaitu $[x,y]=xy-yx$, untuk setiap $x,y\in\mathfrak{aff}(3)$ sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{llll}
[x_1,x_1]=0, & [x_1,x_2]=x_2, & [x_1,x_3]=x_3, & [x_1,x_4]=-x_4,\\
[x_1,x_5]=0, & [x_1,x_6]=0, & [x_1,x_7]=-x_7, & [x_1,x_8]=0,\\
[x_1,x_9]=0, & [x_1,x_{10}]=x_{10}, & [x_1,x_{11}]=0, & [x_1,x_{12}]=0,\\
[x_2,x_1]=-x_2, & [x_2,x_2]=0, & [x_2,x_3]=0, & [x_2,x_4]=x_1-x_5,
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
[x_2,x_5]=x_2, & [x_2,x_6]=x_3, & [x_2,x_7]=-x_8, & [x_2,x_8]=0,\\
[x_2,x_9]=0, & [x_2,x_{10}]=0, & [x_2,x_{11}]=x_{10}, & [x_2,x_{12}]=0,\\
[x_3,x_1]=-x_3, & [x_3,x_2]=0, & [x_3,x_3]=0, & [x_3,x_4]=-x_6,\\
[x_3,x_5]=0, & [x_3,x_6]=0, & [x_3,x_7]=x_1-x_9, & [x_3,x_8]=x_2,\\
[x_3,x_9]=x_3, & [x_3,x_{10}]=0, & [x_3,x_{11}]=0, & [x_3,x_{12}]=x_{10},\\
[x_4,x_1]=x_4, & [x_4,x_2]=x_5-x_1, & [x_4,x_3]=x_6, & [x_4,x_4]=0,\\
[x_4,x_5]=-x_4, & [x_4,x_6]=0, & [x_4,x_7]=0, & [x_4,x_8]=-x_7,\\
[x_4,x_9]=0, & [x_4,x_{10}]=x_{11}, & [x_4,x_{11}]=0, & [x_4,x_{12}]=0,\\
[x_5,x_1]=0, & [x_5,x_2]=-x_2, & [x_5,x_3]=0, & [x_5,x_4]=x_4,\\
[x_5,x_5]=0, & [x_5,x_6]=x_6, & [x_5,x_7]=0, & [x_5,x_8]=-x_8,\\
[x_5,x_9]=0, & [x_5,x_{10}]=0, & [x_5,x_{11}]=x_{11}, & [x_5,x_{12}]=0,\\
[x_6,x_1]=0, & [x_6,x_2]=-x_3, & [x_6,x_3]=0, & [x_6,x_4]=0,\\
[x_6,x_5]=-x_6, & [x_6,x_6]=0, & [x_6,x_7]=x_4, & [x_6,x_8]=x_5-x_9,\\
[x_6,x_9]=x_6, & [x_6,x_{10}]=0, & [x_6,x_{11}]=0, & [x_6,x_{12}]=x_{11},\\
[x_7,x_1]=x_7, & [x_7,x_2]=x_8, & [x_7,x_3]=x_9-x_1, & [x_7,x_4]=0,\\
[x_7,x_5]=0, & [x_7,x_6]=-x_4, & [x_7,x_7]=0, & [x_7,x_8]=0,\\
[x_7,x_9]=-x_7, & [x_7,x_{10}]=x_{12}, & [x_7,x_{11}]=0, & [x_7,x_{12}]=0,\\
[x_8,x_1]=0, & [x_8,x_2]=0, & [x_8,x_3]=-x_2, & [x_8,x_4]=x_7,\\
[x_8,x_5]=x_8, & [x_8,x_6]=x_9-x_5, & [x_8,x_7]=0, & [x_8,x_8]=0,\\
[x_8,x_9]=-x_8, & [x_8,x_{10}]=0, & [x_8,x_{11}]=x_{12}, & [x_8,x_{12}]=0,\\
[x_9,x_1]=0, & [x_9,x_2]=0, & [x_9,x_3]=-x_3, & [x_9,x_4]=0,\\
[x_9,x_5]=0, & [x_9,x_6]=-x_6, & [x_9,x_7]=x_7, & [x_9,x_8]=x_8,\\
[x_9,x_9]=0, & [x_9,x_{10}]=0, & [x_9,x_{11}]=0, & [x_9,x_{12}]=x_{12},\\
[x_{10},x_1]=-x_{10}, & [x_{10},x_2]=0, & [x_{10},x_3]=0, & [x_{10},x_4]=-x_{11},\\
[x_{10},x_5]=0, & [x_{10},x_6]=0, & [x_{10},x_7]=-x_{12}, & [x_{10},x_8]=0,\\
[x_{10},x_9]=0, & [x_{10},x_{10}]=0, & [x_{10},x_{11}]=0, & [x_{10},x_{12}]=0,\\
[x_{11},x_1]=0, & [x_{11},x_2]=-x_{10}, & [x_{11},x_3]=0, & [x_{11},x_4]=0,\\
[x_{11},x_5]=-x_{11}, & [x_{11},x_6]=0, & [x_{11},x_7]=0, & [x_{11},x_8]=-x_{12},\\
[x_{11},x_9]=0, & [x_{11},x_{10}]=0, & [x_{11},x_{11}]=0, & [x_{11},x_{12}]=0,\\
[x_{12},x_1]=0, & [x_{12},x_2]=0, & [x_{12},x_3]=-x_{10}, & [x_{12},x_4]=0,\\
[x_{12},x_5]=0, & [x_{12},x_6]=-x_{11}, & [x_{12},x_7]=0, & [x_{12},x_8]=0,\\
[x_{12},x_9]=-x_{12}, & [x_{12},x_{10}]=0, & [x_{12},x_{11}]=0, & [x_{12},x_{12}]=0.
\end{array}
\tag{20}
$$

Hasil pertama yang diperoleh dalam penelitian ini dinyatakan beberapa proposisi berikut :

Proposisi 16 *Terdapat fungsional Frobenius* $\Sigma = x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^* \in \mathfrak{aff}(3)^*$ *sedemikian sehingga aljabar Lie affine* $\mathfrak{aff}(3)$ *merupakan aljabar Lie Frobenius.*

Proposisi 16 ini selanjutnya diugunakan untuk menunjukkan bahwa $\mathfrak{aff}(3)$ merupakan aljabar koszul dengan menghitung langsung bentuk simetrik kirinya. Kita gunakan induksi simplektik sebagaimana dinyatakan dalam Teorema 17 .

Teorema 17 (Diatta et al., 2020). *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *aljabar Lie Frobenius dimana terdapat pemetaan linear* $f \in \mathfrak{g}^*$ *sehingga alternating bilinear form pada* $\mathfrak{g}$, $\omega(x,y) = f([x,y])$ *adalah non-degenarate. Aljabar koszul pada* $\mathfrak{g}$ *dapat dibentuk dengan persamaan*

$$\omega(u * v, w) = -\omega(v, [u,w]) \text{ atau } f([u * v, w]) = -f\big([v,[u,w]]\big). \tag{21}$$

Hasil ke dua dan merupakan hasil utama dari penelitian ini dinyatakan dalam proposisi berikut:

Proposisi 18 *Aljabar Lie affine* $\mathfrak{aff}(3)$ *merupakan aljabar koszul.*

Bukti Dari Proposisi 16, dapat dipilih fungsional Frobenius $f := \Sigma = x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^* \in \mathfrak{aff}(3)^*$, kemudian menggunakan induksi simplektik persamaan (23), diperoleh

$$\omega(u * v, w) = f([u * v, w]) = -(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)\big([v, [u, w]]\big). \tag{22}$$

Misalkan $u, v \in \mathfrak{aff}(3)$ maka u, v dapat dibentuk menjadi kombinasi linear dari basis $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$ yaitu

$$\begin{aligned} u &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + a_7x_7 + a_8x_8 + a_9x_9 + a_{10}x_{10} + a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12}, \\ v &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7 + b_8x_8 + b_9x_9 + b_{10}x_{10} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12}, \end{aligned} \tag{23}$$

dengan $a_i, b_j, \forall i, j = 1..12$ skalar real.

Selanjutnya, dicari nilai dari $(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_i]),\ i = 1..12$ menggunakan persamaan (23). Hasilnya adalah

$$\begin{aligned}
&(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_1]) \\
&= (x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + a_7x_7 + a_8x_8 + a_9x_9 + \\
&\quad a_{10}x_{10} + a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12})(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7 + b_8x_8 + b_9x_9 + \\
&\quad b_{10}x_{10} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12}), x_1]) \\
&= -(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)\big([(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7 + b_8x_8 + b_9x_9 + \\
&\quad b_{10}x_{10} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12}), [(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + a_7x_7 + a_8x_8 + \\
&\quad a_9x_9 + a_{10}x_{10} + a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12}), x_1]]\big) \\
&= -(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7 + b_8x_8 + b_9x_9 + \\
&\quad b_{10}x_{10} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12}), (a_1[x_1, x_1] + a_2[x_2, x_1] + a_3[x_3, x_1] + a_4[x_4, x_1] + a_5[x_5, x_1] + \\
&\quad a_6[x_6, x_1] + a_7[x_7, x_1] + a_8[x_8, x_1] + a_9[x_9, x_1] + a_{10}[x_{10}, x_1] + a_{11}[x_{11}, x_1] + a_{12}[x_{12}, x_1])]) \\
&= -(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 + b_7x_7 + b_8x_8 + b_9x_9 + \\
&\quad b_{10}x_{10} + b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12}), (-a_2x_2 - a_3x_3 + a_4x_4 + a_7x_7 - a_{10}x_{10})]) \\
&= -(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(-a_2b_1[x_1, x_2] - a_2b_2[x_2, x_2] - a_2b_3[x_3, x_2] - a_2b_4[x_4, x_2] - \\
&\quad a_2b_5[x_5, x_2] - a_2b_6[x_6, x_2] - a_2b_7[x_7, x_2] - a_2b_8[x_8, x_2] - a_2b_9[x_9, x_2] - a_2b_{10}[x_{10}, x_2] - \\
&\quad a_2b_{11}[x_{11}, x_2] - a_2b_{12}[x_{12}, x_2] - a_3b_1[x_1, x_3] - a_3b_2[x_2, x_3] - a_3b_3[x_3, x_3] - a_3b_4[x_4, x_3] - \\
&\quad a_3b_5[x_5, x_3] - a_3b_6[x_6, x_3] - a_3b_7[x_7, x_3] - a_3b_8[x_8, x_3] - a_3b_9[x_9, x_3] - a_3b_{10}[x_{10}, x_3] - \\
&\quad a_3b_{11}[x_{11}, x_3] - a_3b_{12}[x_{12}, x_3] + a_4b_1[x_1, x_4] + a_4b_2[x_2, x_4] + a_4b_3[x_3, x_4] + a_4b_4[x_4, x_4] + \\
&\quad a_4b_5[x_5, x_4] + a_4b_6[x_6, x_4] + a_4b_7[x_7, x_4] + a_4b_8[x_8, x_4] + a_4b_9[x_9, x_4] + a_4b_{10}[x_{10}, x_4] + \\
&\quad a_4b_{11}[x_{11}, x_4] + a_4b_{12}[x_{12}, x_4] + a_7b_1[x_1, x_7] + a_7b_2[x_2, x_7] + a_7b_3[x_3, x_7] + a_7b_4[x_4, x_7] + \\
&\quad a_7b_5[x_5, x_7] + a_7b_6[x_6, x_7] + a_7b_7[x_7, x_7] + a_7b_8[x_8, x_7] + a_7b_9[x_9, x_7] + a_7b_{10}[x_{10}, x_7] + \\
&\quad a_7b_{11}[x_{11}, x_7] + a_7b_{12}[x_{12}, x_7] - a_{10}b_1[x_1, x_{10}] - a_{10}b_2[x_2, x_{10}] - a_{10}b_3[x_3, x_{10}] - \\
&\quad a_{10}b_4[x_4, x_{10}] - a_{10}b_5[x_5, x_{10}] - a_{10}b_6[x_6, x_{10}] - a_{10}b_7[x_7, x_{10}] - a_{10}b_8[x_8, x_{10}] - \\
&\quad a_{10}b_9[x_9, x_{10}] - a_{10}b_{10}[x_{10}, x_{10}] - a_{10}b_{11}[x_{11}, x_{10}] - a_{10}b_{12}[x_{12}, x_{10}]) \\
&= -(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(-a_2b_1x_2 + a_2b_4x_1 - a_2b_4x_5 + a_2b_5x_2 + a_2b_6x_3 - a_2b_7x_8 + \\
&\quad a_2b_{11}x_{10} - a_3b_1x_3 - a_3b_4x_6 + a_3b_7x_1 - a_3b_7x_9 + a_3b_8x_2 + a_3b_9x_3 + a_3b_{12}x_{10} - a_4b_1x_4 + \\
&\quad a_4b_2x_1 - a_4b_2x_5 - a_4b_3x_6 + a_4b_5x_4 + a_4b_8x_7 - a_4b_{10}x_{11} - a_7b_1x_7 - a_7b_2x_8 + a_7b_3x_1 - \\
&\quad a_7b_3x_9 + a_7b_6x_4 + a_7b_9x_7 - a_7b_{10}x_{12} - a_{10}b_1x_{10} - a_{10}b_4x_{11} - a_{10}b_7x_{12}) \\
&= a_2b_1(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_2) - a_2b_4(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_1) + a_2b_4(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + \\
&\quad x_{12}^*)(x_5) - a_2b_5(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_2) - a_2b_6(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_3) + a_2b_7(x_1^* + x_6^* + \\
&\quad x_{10}^* + x_{12}^*)(x_8) - a_2b_{11}(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{10}) + a_3b_1(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_3) + \\
&\quad a_3b_4(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_6) - a_3b_7(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_1) + a_3b_7(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* +
\end{aligned}$$

$$x_{12}^*)(x_9) - a_3b_8(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_2) - a_3b_9(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_3) - a_3b_{12}(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{10}) + a_4b_1(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_4) - a_4b_2(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_1) + a_4b_2(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_5) + a_4b_3(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_6) - a_4b_5(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_4) - a_4b_8(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_7) + a_4b_{10}(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{11}) + a_7b_1(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_7) + a_7b_2(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_8) - a_7b_3(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_1) + a_7b_3(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_9) - a_7b_6(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_4) - a_7b_9(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_7) + a_7b_{10}(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{12}) + a_{10}b_1(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{10}) + a_{10}b_4(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{11}) + a_{10}b_7(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{12})$$
$$= -a_2b_4 - a_2b_{11} + a_3b_4 - a_3b_7 - a_3b_{12} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_7b_3 + a_7b_{10} + a_{10}b_1 + a_{10}b_7$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_1]) = -a_2b_4 - a_2b_{11} + a_3b_4 - a_3b_7 - a_3b_{12} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_7b_3 + a_7b_{10} + a_{10}b_1 + a_{10}b_7.$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada perhitungan di atas dapat ditunjukkan bahwa

$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_2]) = a_1b_4 + a_1b_{11} + a_4b_6 - a_4b_{10} - a_5b_4 - a_5b_{11} + a_6b_4 - a_6b_7 - a_6b_{12} + a_7b_{11} + a_{11}b_1 + a_{11}b_7$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_3]) = -a_1b_4 + a_1b_7 + a_1b_{12} - a_4b_5 + a_4b_9 - a_7b_6 - a_7b_{10} + a_7b_{12} - a_8b_4 - a_8b_{11} + a_9b_4 - a_9b_7 - a_9b_{12} + a_{12}b_1 + a_{12}b_7$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_4]) = a_1b_2 - a_1b_3 - a_2b_6 + a_2b_{10} + a_3b_5 - a_3b_9 - a_5b_2 + a_5b_3 - a_8b_3 + a_8b_{10} + a_{10}b_2 + a_{10}b_8$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_5]) = a_2b_4 + a_2b_{11} + a_4b_2 - a_4b_3 + a_6b_5 - a_6b_9 + a_8b_{11} + a_{11}b_2 + a_{11}b_8$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_6]) = -a_2b_4 + a_2b_7 + a_2b_{12} - a_5b_5 + a_5b_9 + a_7b_2 - a_7b_3 - 2a_8b_6 + a_8b_{12} + a_9b_5 - a_9b_9 + a_{12}b_2 + a_{12}b_8$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_7]) = a_1b_3 - a_1b_{10} - a_2b_{11} + a_3b_6 + a_3b_{10} - a_3b_{12} - a_6b_2 + a_6b_3 - a_9b_3 + a_9b_{10} + a_{10}b_3 + a_{10}b_9$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_8]) = a_3b_4 + a_3b_{11} + a_4b_3 - a_4b_{10} - a_5b_{11} + 2a_6b_6 - a_6b_{12} + a_9b_{11} + a_{11}b_3 + a_{11}b_9$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_9]) = -a_3b_4 + a_3b_7 + a_3b_{12} - a_6b_5 + a_6b_9 + a_7b_3 - a_7b_{10} - a_8b_{11} + a_{12}b_3 + a_{12}b_9$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_{10}]) = -a_1b_1 - a_1b_7 - a_4b_2 - a_4b_8 - a_7b_3 - a_7b_9$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_{11}]) = -a_2b_1 - a_2b_7 - a_5b_2 - a_5b_8 - a_8b_3 - a_8b_9$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_{12}]) = -a_3b_1 - a_3b_7 - a_6b_2 - a_6b_8 - a_9b_3 - a_9b_9$$

Karena $(u * v) \in \mathfrak{aff}(3)$ maka $(u * v)$ dapat dibentuk menjadi kombinasi linear dari basis-basis $\mathfrak{aff}(3)$.

$$u * v = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 + c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12}. \quad (24)$$

Selanjutnya, dicari kembali nilai dari $(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_i]), i = 1..12$ dengan mensubstitusikan persamaan (24).
Pertama dihitung untuk $i = 1$ yaitu $(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_1])$. Pada kasusi ini dapat ditulis

$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_1])$$
$$= (x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + c_7x_7 + c_8x_8 + c_9x_9 + c_{10}x_{10} + c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12}), x_1])$$
$$= (x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)\big([c_1[x_1, x_1] + c_2[x_2, x_1] + c_3[x_3, x_1] + c_4[x_4, x_1] + c_5[x_5, x_1] + c_6[x_6, x_1] + c_7[x_7, x_1] + c_8[x_8, x_1] + c_9[x_9, x_1] + c_{10}[x_{10}, x_1] + c_{11}[x_{11}, x_1] + c_{12}[x_{12}, x_1]]\big)$$
$$= (x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(-c_2x_2 - c_3x_3 + c_4x_4 + c_7x_7 - c_{10}x_{10})$$
$$= -c_2(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_2) - c_3(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_3) + c_4(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_4) + c_7(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_7) - c_{10}(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)(x_{10})$$
$$= -c_{10}$$

Jadi $(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_1]) = -c_{10}$.

Dengan menggunakan cara yang sama pada perhitungan di atas, dihitung untuk $i = 2$ sampai dengan $i = 12$, diperoleh

$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_2]) = -c_4 - c_{11}$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_3]) = c_4 - c_7 - c_{12}$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_4]) = c_2 - c_3$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_5]) = -c_6$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_6]) = c_5 - c_9$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_7]) = c_3 - c_{10}$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_8]) = -c_{11}$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_9]) = c_6 - c_{12}$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_{10}]) = c_1 + c_7$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_{11}]) = c_2 + c_8$$
$$(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_{12}]) = c_3 + c_9$$

Kemudian dari hasil perhitungan $(x_1^* + x_6^* + x_{10}^* + x_{12}^*)([u * v, x_i]), i = 1..12$ dapat dicari nilai c_i terhadap skalar real a_i dan b_i. Dengan eliminasi dan substitusi persamaan perhitungan di atas diperoleh nilai c_i untuk $i = 1..12$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
c_1 = {} & -a_1b_1 + a_1b_{11} + a_1b_{12} - a_2b_4 - a_2b_{11} - a_3b_7 - a_3b_{11} - a_3b_{12} - 2a_4b_2 - a_4b_5 + a_4b_6 - \\
& a_4b_8 + a_4b_9 - a_5b_4 + a_6b_4 - 2a_6b_6 - a_6b_7 - 2a_7b_3 - a_7b_6 - a_7b_9 + a_7b_{11} + a_7b_{12} - \\
& a_8b_4 - a_8b_{11} + a_9b_4 - a_9b_7 - a_9b_{11} - a_9b_{12} + a_{11}b_1 - a_{11}b_2 - a_{11}b_3 + a_{11}b_7 - a_{11}b_8 - \\
& a_{11}b_9 + a_{12}b_1 - a_{12}b_3 + a_{12}b_7 - a_{12}b_9 \\
c_2 = {} & a_1b_2 - a_1b_{10} + a_2b_4 - a_2b_6 + a_2b_{10} - a_3b_4 + a_3b_5 + a_3b_6 + a_3b_7 - a_3b_9 + a_3b_{10} + \\
& a_4b_2 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_5b_3 - a_6b_2 + a_6b_3 + a_7b_3 - a_7b_{10} - a_8b_3 + a_8b_{10} - a_9b_3 + \\
& a_9b_{10} - a_{10}b_1 + a_{10}b_2 + a_{10}b_3 - a_{10}b_7 + a_{10}b_8 + a_{10}b_9 \\
c_3 = {} & a_1b_3 - a_1b_{10} + a_2b_4 - a_3b_4 + a_3b_6 + a_3b_7 + a_3b_{10} + a_4b_2 - a_4b_3 - a_6b_2 + a_6b_3 + a_7b_3 - \\
& a_7b_{10} - a_9b_3 + a_9b_{10} - a_{10}b_1 + a_{10}b_3 - a_{10}b_7 + a_{10}b_9 \\
c_4 = {} & -a_1b_4 - a_1b_{11} + a_3b_4 + a_3b_{11} + a_4b_3 - a_4b_6 + a_5b_4 - a_6b_4 + 2a_6b_6 + a_6b_7 - a_7b_{11} + \\
& a_9b_{11} - a_{11}b_1 + a_{11}b_3 - a_{11}b_7 + a_{11}b_9 \\
c_5 = {} & -a_1b_3 + a_1b_{10} - 2a_2b_4 + a_2b_7 + a_2b_{12} - a_3b_1 + a_3b_4 - a_3b_6 - 2a_3b_7 - a_3b_{10} - a_4b_2 + \\
& a_4b_3 - a_5b_5 + a_5b_9 - a_6b_3 - a_6b_8 + a_7b_2 - 2a_7b_3 + a_7b_{10} - 2a_8b_6 + a_8b_{12} + a_9b_5 - \\
& 2a_9b_9 - a_9b_{10} + a_{10}b_1 - a_{10}b_3 + a_{10}b_7 - a_{10}b_9 + a_{12}b_2 + a_{12}b_8 \\
c_6 = {} & -a_2b_4 - a_2b_{11} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_6b_5 + a_6b_9 - a_8b_{11} - a_{11}b_2 - a_{11}b_8 \\
c_7 = {} & -a_1b_7 - a_1b_{11} - a_1b_{12} + a_2b_4 + a_2b_{11} + a_3b_7 + a_3b_{11} + a_3b_{12} + a_4b_2 + a_4b_5 - a_4b_6 - \\
& a_4b_9 + a_5b_4 - a_6b_4 + 2a_6b_6 + a_6b_7 + a_7b_3 + a_7b_6 - a_7b_{11} - a_7b_{12} + a_8b_4 + a_8b_{11} - \\
& a_9b_4 + a_9b_7 + a_9b_{11} + a_9b_{12} - a_{11}b_1 + a_{11}b_2 + a_{11}b_3 - a_{11}b_7 + a_{11}b_8 + a_{11}b_9 - a_{12}b_1 + \\
& a_{12}b_3 - a_{12}b_7 + a_{12}b_9 \\
c_8 = {} & -a_1b_2 + a_1b_{10} - a_2b_1 - a_2b_4 + a_2b_6 - a_2b_7 - a_2b_{10} + a_3b_4 - a_3b_5 - a_3b_6 - a_3b_7 + \\
& a_3b_9 - a_3b_{10} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_5b_3 - a_5b_8 + a_6b_2 - a_6b_3 - a_7b_3 + a_7b_{10} - a_8b_9 - \\
& a_8b_{10} + a_9b_3 - a_9b_{10} + a_{10}b_1 - a_{10}b_2 - a_{10}b_3 + a_{10}b_7 - a_{10}b_8 - a_{10}b_9 \\
c_9 = {} & -a_1b_3 + a_1b_{10} - a_2b_4 - a_3b_1 + a_3b_4 - a_3b_6 - 2a_3b_7 - a_3b_{10} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_6b_3 - \\
& a_6b_8 - a_7b_3 + a_7b_{10} - a_9b_9 - a_9b_{10} + a_{10}b_1 - a_{10}b_3 + a_{10}b_7 - a_{10}b_9 \\
c_{10} = {} & a_2b_4 + a_2b_{11} - a_3b_4 + a_3b_7 + a_3b_{12} + a_4b_2 - a_4b_3 + a_7b_3 - a_7b_{10} - a_{10}b_1 - a_{10}b_7 \\
c_{11} = {} & -a_3b_4 - a_3b_{11} - a_4b_3 + a_4b_{10} + a_5b_{11} - 2a_6b_6 + a_6b_{12} - a_9b_{11} - a_{11}b_3 - a_{11}b_9 \\
c_{12} = {} & -a_2b_4 - a_2b_{11} + a_3b_4 - a_3b_7 - a_3b_{12} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_7b_3 + a_7b_{10} - a_{11}b_2 - a_{11}b_8 - \\
& a_{12}b_3 - a_{12}b_9
\end{aligned}$$

Kemudian, nilai c_i untuk $i = 1..12$ disubstitusikan ke persamaan (24) sehingga operasi perkalian "$*$" didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
u * v = {} & (-a_1b_1 + a_1b_{11} + a_1b_{12} - a_2b_4 - a_2b_{11} - a_3b_7 - a_3b_{11} - a_3b_{12} - 2a_4b_2 - a_4b_5 + \\
& a_4b_6 - a_4b_8 + a_4b_9 - a_5b_4 + a_6b_4 - 2a_6b_6 - a_6b_7 - 2a_7b_3 - a_7b_6 - a_7b_9 + a_7b_{11} + \\
& a_7b_{12} - a_8b_4 - a_8b_{11} + a_9b_4 - a_9b_7 - a_9b_{11} - a_9b_{12} + a_{11}b_1 - a_{11}b_2 - a_{11}b_3 + a_{11}b_7 - \\
& a_{11}b_8 - a_{11}b_9 + a_{12}b_1 - a_{12}b_3 + a_{12}b_7 - a_{12}b_9)x_1 + (a_1b_2 - a_1b_{10} + a_2b_4 - a_2b_6 + \\
& a_2b_{10} - a_3b_4 + a_3b_5 + a_3b_6 + a_3b_7 - a_3b_9 + a_3b_{10} + a_4b_2 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_5b_3 - \\
& a_6b_2 + a_6b_3 + a_7b_3 - a_7b_{10} - a_8b_3 + a_8b_{10} - a_9b_3 + a_9b_{10} - a_{10}b_1 + a_{10}b_2 + a_{10}b_3 - \\
& a_{10}b_7 + a_{10}b_8 + a_{10}b_9)x_2 + (a_1b_3 - a_1b_{10} + a_2b_4 - a_3b_4 + a_3b_6 + a_3b_7 + a_3b_{10} + \\
& a_4b_2 - a_4b_3 - a_6b_2 + a_6b_3 + a_7b_3 - a_7b_{10} - a_9b_3 + a_9b_{10} - a_{10}b_1 + a_{10}b_3 - a_{10}b_7 + \\
& a_{10}b_9)x_3 + (-a_1b_4 - a_1b_{11} + a_3b_4 + a_3b_{11} + a_4b_3 - a_4b_6 + a_5b_4 - a_6b_4 + 2a_6b_6 + \\
& a_6b_7 - a_7b_{11} + a_9b_{11} - a_{11}b_1 + a_{11}b_3 - a_{11}b_7 + a_{11}b_9)x_4 + (-a_1b_3 + a_1b_{10} - 2a_2b_4 + \\
& a_2b_7 + a_2b_{12} - a_3b_1 + a_3b_4 - a_3b_6 - 2a_3b_7 - a_3b_{10} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_5b_5 + a_5b_9 - \\
& a_6b_3 - a_6b_8 + a_7b_2 - 2a_7b_3 + a_7b_{10} - 2a_8b_6 + a_8b_{12} + a_9b_5 - 2a_9b_9 - a_9b_{10} + a_{10}b_1 - \\
& a_{10}b_3 + a_{10}b_7 - a_{10}b_9 + a_{12}b_2 + a_{12}b_8)x_5 + (-a_2b_4 - a_2b_{11} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_6b_5 + \\
& a_6b_9 - a_8b_{11} - a_{11}b_2 - a_{11}b_8)x_6 + (-a_1b_7 - a_1b_{11} - a_1b_{12} + a_2b_4 + a_2b_{11} + a_3b_7 + \\
& a_3b_{11} + a_3b_{12} + a_4b_2 + a_4b_5 - a_4b_6 - a_4b_9 + a_5b_4 - a_6b_4 + 2a_6b_6 + a_6b_7 + a_7b_3 + \\
& a_7b_6 - a_7b_{11} - a_7b_{12} + a_8b_4 + a_8b_{11} - a_9b_4 + a_9b_7 + a_9b_{11} + a_9b_{12} - a_{11}b_1 + a_{11}b_2 + \\
& a_{11}b_3 - a_{11}b_7 + a_{11}b_8 + a_{11}b_9 - a_{12}b_1 + a_{12}b_3 - a_{12}b_7 + a_{12}b_9)x_7 + (-a_1b_2 + a_1b_{10} - \\
& a_2b_1 - a_2b_4 + a_2b_6 - a_2b_7 - a_2b_{10} + a_3b_4 - a_3b_5 - a_3b_6 - a_3b_7 + a_3b_9 - a_3b_{10} - \\
& a_4b_2 + a_4b_3 - a_5b_3 - a_5b_8 + a_6b_2 - a_6b_3 - a_7b_3 + a_7b_{10} - a_8b_9 - a_8b_{10} + a_9b_3 - \\
& a_9b_{10} + a_{10}b_1 - a_{10}b_2 - a_{10}b_3 + a_{10}b_7 - a_{10}b_8 - a_{10}b_9)x_8 + (-a_1b_3 + a_1b_{10} - a_2b_4 - \\
& a_3b_1 + a_3b_4 - a_3b_6 - 2a_3b_7 - a_3b_{10} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_6b_3 - a_6b_8 - a_7b_3 + a_7b_{10} - \\
& a_9b_9 - a_9b_{10} + a_{10}b_1 - a_{10}b_3 + a_{10}b_7 - a_{10}b_9)x_9 + (a_2b_4 + a_2b_{11} - a_3b_4 + a_3b_7 + \\
& a_3b_{12} + a_4b_2 - a_4b_3 + a_7b_3 - a_7b_{10} - a_{10}b_1 - a_{10}b_7)x_{10} + (-a_3b_4 - a_3b_{11} - a_4b_3 + \\
& a_4b_{10} + a_5b_{11} - 2a_6b_6 + a_6b_{12} - a_9b_{11} - a_{11}b_3 - a_{11}b_9)x_{11} + (-a_2b_4 - a_2b_{11} + a_3b_4 - \\
& a_3b_7 - a_3b_{12} - a_4b_2 + a_4b_3 - a_7b_3 + a_7b_{10} - a_{11}b_2 - a_{11}b_8 - a_{12}b_3 - a_{12}b_9)x_{12}
\end{aligned} \tag{25}
$$

Setiap elemen basis pada $\mathfrak{aff}(3)$ dinyatakan sebagai kombinasi linear dari basis-basis $\mathfrak{aff}(3)$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_2 &= 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_3 &= 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_4 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_5 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_6 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_7 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_8 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_9 &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 1x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_{10} &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 1x_{10} + 0x_{11} + 0x_{12} \\
x_{11} &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 1x_{11} + 0x_{12} \\
x_{12} &= 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} + 1x_{12}
\end{aligned} \tag{26}
$$

Apabila setiap kombinasi linear pada (26) saling dioperasikan pada operasi perkalian "$*$" yang didefinisikan pada (25) maka rumus eksplisi aljabar koszul untuk $\mathfrak{aff}(3)$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$x_1 * x_1 = -x_1,$	$x_1 * x_2 = x_2 - x_8,$	$x_1 * x_3 = x_3 - x_5 - x_9,$
$x_1 * x_4 = -x_4,$	$x_1 * x_5 = 0,$	$x_1 * x_6 = 0,$
$x_1 * x_7 = -x_7,$	$x_1 * x_8 = 0,$	$x_1 * x_9 = 0,$
$x_1 * x_{10} = -x_2 - x_3 + x_5 + x_8 + x_9,$	$x_1 * x_{11} = x_1 - x_4 - x_7,$	$x_1 * x_{12} = x_1 - x_7,$
$x_2 * x_1 = -x_8,$	$x_2 * x_2 = 0,$	$x_2 * x_3 = 0,$

$x_2 * x_4 = -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6 + x_7 - x_8 - x_9 + x_{10} - x_{12}$, $x_2 * x_5 = 0$, $x_2 * x_6 = -x_2 + x_8$,
$x_2 * x_7 = x_5 - x_8$, $x_2 * x_8 = 0$, $x_2 * x_9 = 0$,
$x_2 * x_{10} = x_2 - x_8$, $x_2 * x_{11} = -x_1 - x_6 + x_7 + x_{10} - x_{12}$, $x_2 * x_{12} = x_5$,
$x_3 * x_1 = -x_5 - x_9$, $x_3 * x_2 = 0$, $x_3 * x_3 = 0$,
$x_3 * x_4 = -x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_8 + x_9 - x_{10} - x_{11} + x_{12}$, $x_3 * x_5 = x_2 - x_8$, $x_3 * x_6 = x_2 + x_3 - x_5 - x_8 - x_9$,
$x_3 * x_7 = -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 + x_7 - x_8 - 2x_9 + x_{10} - x_{12}$, $x_3 * x_8 = 0$, $x_3 * x_9 = -x_2 + x_8$,
$x_3 * x_{10} = x_2 + x_3 - x_5 - x_8 - x_9$, $x_3 * x_{11} = -x_1 + x_4 + x_7 - x_{11}$, $x_3 * x_{12} = -x_1 + x_7 + x_{10} - x_{12}$,
$x_4 * x_1 = 0$, $x_4 * x_2 = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 - x_6 + x_7 - x_8 - x_9 + x_{10} - x_{12}$, $x_4 * x_3 = -x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_8 + x_9 - x_{10} - x_{11} + x_{12}$,
$x_4 * x_4 = 0$, $x_4 * x_5 = -x_1 + x_7$, $x_4 * x_6 = x_1 - x_4 - x_7$,
$x_4 * x_7 = 0$, $x_4 * x_8 = -x_1$, $x_4 * x_9 = x_1 - x_7$,
$x_4 * x_{10} = x_{11}$, $x_4 * x_{11} = 0$, $x_4 * x_{12} = 0$,
$x_5 * x_1 = 0$, $x_5 * x_2 = -x_2$, $x_5 * x_3 = x_2 - x_8$,
$x_5 * x_4 = -x_1 + x_4 + x_7$, $x_5 * x_5 = -x_5$, $x_5 * x_6 = 0$,
$x_5 * x_7 = 0$, $x_5 * x_8 = -x_8$, $x_5 * x_9 = x_5$,
$x_5 * x_{10} = 0$, $x_5 * x_{11} = x_{11}$, $x_5 * x_{12} = 0$,
$x_6 * x_1 = 0$, $x_6 * x_2 = -x_2 - x_3 + x_8$, $x_6 * x_3 = x_2 + x_3 - x_5 - x_8 - x_9$,
$x_6 * x_4 = x_1 - x_4 - x_7$, $x_6 * x_5 = -x_6$, $x_6 * x_6 = -2x_1 + 2x_4 + 2x_7 - 2x_{11}$,
$x_6 * x_7 = -x_1 + x_4 + x_7$, $x_6 * x_8 = -x_5 - x_9$, $x_6 * x_9 = x_6$,
$x_6 * x_{10} = 0$, $x_6 * x_{11} = 0$, $x_6 * x_{12} = x_{11}$,
$x_7 * x_1 = 0$, $x_7 * x_2 = x_5$, $x_7 * x_3 = -2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_5 + x_7 - x_8 - x_9 + x_{10} - x_{12}$,
$x_7 * x_4 = 0$, $x_7 * x_5 = 0$, $x_7 * x_6 = -x_1 + x_7$,
$x_7 * x_7 = 0$, $x_7 * x_8 = 0$, $x_7 * x_9 = -x_1$,
$x_7 * x_{10} = -x_2 - x_3 + x_5 + x_8 + x_9 - x_{10} + x_{12}$, $x_7 * x_{11} = x_1 - x_4 - x_7$, $x_7 * x_{12} = x_1 - x_7$,
$x_8 * x_1 = 0$, $x_8 * x_2 = 0$, $x_8 * x_3 = -x_2$,
$x_8 * x_4 = -x_1 + x_7$, $x_8 * x_5 = 0$, $x_8 * x_6 = -2x_5$,
$x_8 * x_7 = 0$, $x_8 * x_8 = 0$, $x_8 * x_9 = -x_8$,
$x_8 * x_{10} = x_2 - x_8$, $x_8 * x_{11} = -x_1 - x_6 + x_7$, $x_8 * x_{12} = x_5$,
$x_9 * x_1 = 0$, $x_9 * x_2 = 0$, $x_9 * x_3 = -x_2 - x_3 + x_8$,
$x_9 * x_4 = x_1 - x_7$, $x_9 * x_5 = x_5$, $x_9 * x_6 = 0$,
$x_9 * x_7 = -x_1 + x_7$, $x_9 * x_8 = 0$, $x_9 * x_9 = -2x_5 - x_9$,
$x_9 * x_{10} = x_2 + x_3 - x_5 - x_8 - x_9$, $x_9 * x_{11} = -x_1 + x_4 + x_7 - x_{11}$, $x_9 * x_{12} = -x_1 + x_7$,
$x_{10} * x_1 = -x_2 - x_3 + x_5 + x_8 + x_9 - x_{10}$, $x_{10} * x_2 = x_2 - x_8$, $x_{10} * x_3 = x_2 + x_3 - x_5 - x_8 - x_9$,
$x_{10} * x_4 = 0$, $x_{10} * x_5 = 0$, $x_{10} * x_6 = 0$,
$x_{10} * x_7 = -x_2 - x_3 + x_5 + x_8 + x_9 - x_{10}$, $x_{10} * x_8 = x_2 - x_8$, $x_{10} * x_9 = x_2 + x_3 - x_5 - x_8 - x_9$,
$x_{10} * x_{10} = 0$, $x_{10} * x_{11} = 0$, $x_{10} * x_{12} = 0$,

$$
\begin{aligned}
&x_{11} * x_1 = x_1 - x_4 - x_7, && x_{11} * x_2 = -x_1 - x_6 + x_7 - x_{12}, && x_{11} * x_3 = -x_1 - x_4 + x_7 - x_{11},\\
&x_{11} * x_4 = 0, && x_{11} * x_5 = 0, && x_{11} * x_6 = 0,\\
&x_{11} * x_7 = x_1 - x_4 - x_7, && x_{11} * x_8 = -x_1 - x_6 + x_7 - x_{12}, && x_{11} * x_9 = -x_1 - x_4 + x_7 - x_{11},\\
&x_{11} * x_{10} = 0, && x_{11} * x_{11} = 0, && x_{11} * x_{12} = 0,\\
&x_{12} * x_1 = x_1 - x_7, && x_{12} * x_2 = x_5, && x_{12} * x_3 = -x_1 + x_7 - x_{12},\\
&x_{12} * x_4 = 0, && x_{12} * x_5 = 0, && x_{12} * x_6 = 0,\\
&x_{12} * x_7 = x_1 - x_7, && x_{12} * x_8 = x_5, && x_{12} * x_9 = -x_1 + x_7 - x_{12},\\
&x_{12} * x_{10} = 0, && x_{12} * x_{11} = 0, && x_{12} * x_{12} = 0.
\end{aligned} \tag{27}
$$

Jadi terbukti bahwa $\mathfrak{aff}(3)$ merupakan aljabar koszul.

∎

Untuk penelitian selanjutnya, dapat dicari bentuk umum dari fungsional Frobenius di $\mathfrak{aff}(n)$ dan juga eksistensi aljabar koszul pada $\mathfrak{aff}(n)$. Dugaan penulis dapat dinyatakan sebagai berikut:

Konjektur 1 *Aljabar Lie affine* $\mathfrak{aff}(n)$ *adalah aljabar Lie Frobenius yang sekaligus mempunyai struktur aljabar koszul.*

SIMPULAN

Aljabar koszul pada aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(3)$ berdimensi 12 senantiasa ada dan rumus eksplisitnya telah diberikan dalam persamaan (27). Untuk penelitian lebih lanjut, hasil yang diperoleh dalam penelitian ini dapat dijadikan dasar untuk mempelajari aljabar Lie affine $\mathfrak{aff}(n)$ berdimensi $n(n+1)$. Konjektur penulis bahwa aljabar Lie $\mathfrak{aff}(n)$ adalah aljabar Lie Frobenius yang sekaligus dilengkapi dengan aljabar koszul sebagaimana dinyatakan dalam konjektur 1 di atas dapat dibuktikan untuk penelitian selanjutnya. Di sisi lain, dapat dipelajari teori representasi grup Lie dari $\mathfrak{aff}(3)$ berkorespondensi dengan fungsional linear-nya. Metode representasi ini dikenal dengan nama metode orbit.

DAFTAR PUSTAKA

Alvarez, M. A., Rodríguez-Vallarte, M. C., & Salgado, G. (2018). Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical. *Comm. Algebra*, *46*, 4344–4354. https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00927872.2018.1439048

Austin, T., Bantilan, H., Jonas, I., & Kory, P. (2007). The Pfaffian Transformation Introduction to the Pfaffian Transformation The Pfaffian of a Skew-Symmetric Matrix. *ReCALL*.

Burde, D. (2006). Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics. *Central European Journal of Mathematics*, *4*(3), 323–357. https://doi.org/10.2478/s11533-006-0014-9

Csikós, B., & Verhóczki, L. (2007). Classification of Frobenius Lie algebras of dimension ≤ 6. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, *70*, 427–451. https://publi.math.unideb.hu/load_doc.php?p=1205&t=pap

Diatta, A., & Manga, B. (2014). On properties of principal elements of Frobenius Lie algebras. *J. Lie Theory*, *24*(3), 849–864. https://arxiv.org/abs/1212.5380

Diatta, A., Manga, B., & Mbaye, A. (2020). On systems of commuting matrices, Frobenius Lie algebras and Gerstenhaber's Theorem. *arXiv: Rings and Algebras*. 0–12. https://arxiv.org/abs/2002.08737

Gerstenhaber, M., & Giaquinto, A. (2009). The principal element of a Frobenius Lie algebra. *Letters in Mathematical Physics*, *88*(1–3), 333–341. https://doi.org/10.1007/s11005-009-0321-8

Graaf, W. A. De. (2007). *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*. *309*(2), 640–653. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2006.08.006

Hilgert, J., & Neeb, K.-H. (2012). *Structure and Geometry of Lie Groups*. New York: Springer Monographs in Mathematics, Springer.

Humphreys, J. E. (1972). *Introduction to Lie ALgebra and its Representation.pdf* (Third Prin). New York Heidelberg Berlin: Springer-Verlag.

Humphreys, J. E. (1980). *introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer.

Kirillov, A. A. (2004). *Lectures on the Orbit Method, Graduate Studies in Mathematics, 64*. American Mathematical Society, Providence.

Kurniadi, E. (2019). *Harmonic analysis for finite dimensional real Frobenius Lie algebras*. Nagoya University.

Kurniadi, E., Carnia, E., & Supriatna, A. K. (2021). The construction of real Frobenius Lie algebras from non-commutative nilpotent Lie Algebras of dimension ≤4. *IOP Journal of Physics Conference Series*, *22*(1). https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1722/1/012025/meta

Kurniadi, E., & Ishi, H. (2019). Harmonic Analysis for 4- Dimensional Real Frobenius Lie Algebras. *Springer Proceeding in Mathematics & Statistics, 290, 95-109.* https://doi.org/10.1007/978-3-030-26562-5_4

Li, H., Tan, S., & Wang, Q. (2020). Trigonometric Lie algebras, affine Lie algebras, and vertex algebras. *Journal of Advance in Mathematics*, *363, 1-34*. https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.106985

McInerney, A. (2013). *First Steps in Differential Geometry : Riemannian, Contact, Symplectic*. New York : Springer-Verlag.

Muraleetharan, B., Thirulogasanthar, K., & Sabadini, I. (2017). A representation of Weyl-Heisenberg Lie algebra in the quaternionic setting. *Annals of Physics*, *385*, 180–213. https://doi.org/10.1016/j.aop.2017.07.014

Niroomand, P., & Parvizi, M. (2017). 2-capability and 2-nilpotent multiplier of finite dimensional nilpotent Lie algebras. *Journal of Geometry and Physics*, *121*, 180–185. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2017.07.003

Ooms, A. I. (2009). Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras. *Journal of Algebra*, *321*(4), 1293–1312. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.026

Ooms, A. I. (1980). On frobenius lie algebras. *Communications in Algebra*, *8*(1), 13-52. https://doi.org/10.1080/00927878008822445

Pham, D. N. (2016). G-Quasi-Frobenius Lie Algebras. *Archivum Mathematicum*, *52*(4), 233–262. https://doi.org/10.5817/AM2016-4-233

Szechtman, F. (2014). Modular representations of Heisenberg algebras. *Linear Algebra and Its Applications*, *457*, 49–60. https://arxiv.org/abs/1306.4290

Xue, T. (2014). Nilpotent coadjoint orbits in small characteristic. *Journal of Algebra*, *397*, 111–140. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869313004833