

# PENGARUH GANGGUAN NONLINEAR PADA SISTEM DINAMIK DENGAN POTRET FASE CENTER

## THE EFFECT OF NONLINEAR DAMPING TO A DYNAMICAL SYSTEM WITH CENTER PHASE PORTAIT

Kus Prihantoso Kurniawan\* dan Husna Arifah

Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta

\*email: [kuspk@uny.ac.id](mailto:kuspk@uny.ac.id)

diterima 3 Desember 2014, disetujui 3 Maret 2015

### Abstrak

Pada makalah ini dibahas mengenai pengaruh gangguan nonlinear terhadap sistem dua dimensi dengan potret fase *center*. Potret fase dari sistem dengan gangguan digambarkan untuk tiga nilai parameter yang berbeda sebagai bukti numerik adanya perubahan potret fase. Pembuktian secara analitik dilakukan dengan menggunakan teorema yang menjamin adanya solusi periodik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa gangguan pada sistem dengan potret fase *center* dapat mengakibatkan adanya perubahan potret fase secara topologi. Perubahan ini menunjukkan adanya bifurkasi *Hopf* tergeneralisasi.

Kata kunci: bifurkasi *Hopf* tergeneralisasi, potret fase *center*, solusi periodik

### Abstract

*This paper discusses the effect of nonlinear damping to a 2-dimesional system that has center phase portrait. The phase portraits of the damped system are drawn for 3 different values of parameter. These phase portraits stand as the numerical proof of phase portrait change. To prove the change analitically, we use the theorem that guarantee the existence of periodic solution. The result shows that nonlinear damping changes the phase portrait topologically. It means that the system undergoes a generalized Hopf bifurcation.*

*Keywords: generalized Hopf bifurcation, center phase portrait, periodic solution*

### Pendahuluan

Pada suatu sistem persamaan :

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (1)$$

dengan  $x$  menyatakan variabel keadaan ( $x \in E \subseteq \mathbb{R}^n$ ),  $\alpha$  adalah sebuah parameter ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ), dan  $f(x)$  adalah suatu vektor fungsi yang kontinu *Lipschitz*. Solusi dari sistem (1) mendefinisikan lintasan pergerakan orbit pada ruang  $E$ . Pergerakan ini dapat didiskripsikan secara geometris dengan menggambarkan kurva solusi pada ruang  $E$  yang dilengkapi dengan tanda panah untuk mengindikasikan pergerakan orbit disepanjang kurva seiring dengan naiknya waktu  $t$ . Ruang  $E$  yang digunakan untuk menggambarkan kurva solusi ini kemudian disebut sebagai **ruang fase**. Himpunan kurva solusi di dalam ruang fase disebut sebagai **potret fase** (lihat [5]). Setidaknya ada empat jenis potret

fase di sekitar titik kesetimbangan sistem, yaitu *saddle*, *node*, *focus*, dan *center*.

Pada kasus tertentu, bentuk potret fase di sekitar titik kesetimbangan suatu sistem dapat berubah karena pergerakan nilai parameter. Jika pergerakan parameter mengakibatkan perubahan bentuk potret fase secara topologi, maka sistem telah mengalami bifurkasi (lihat [4]). Empat jenis bifurkasi yang dikenal dan terjadi pada sistem dinamik kontinu dengan satu parameter adalah *saddle node*, *pitchfork*, transkritikal, dan *Hopf* [7]. Penelitian terhadap sistem yang mengalami bifurkasi telah banyak dilakukan (*saddle-node* [8], *pitchfork* [3], *transkritikal* [1], dan *Hopf* [2]). Jika diperhatikan hanya pada saat terjadi bifurkasi, masing-masing jenis bifurkasi mempunyai bentuk potret fase yang berbeda-beda.

Potret fase di sekitar titik kesetimbangan sistem saat terjadi bifurkasi *pitchfork* superkritikal adalah berbentuk *node* sedangkan bentuk potret fase saat terjadi bifurkasi *pitchfork* subkritikal adalah *saddle*. Bentuk potret fase saat terjadi bifurkasi *saddle-node* atau transkritikal adalah perpaduan antara *saddle* dan *node*. Untuk bifurkasi *Hopf*, potret fase di sekitar titik kesetimbangan saat terjadi bifurkasi adalah berupa fokus. Sehingga, setidaknya masih ada satu bentuk potret fase yang tidak muncul saat terjadi bifurkasi, yaitu bentuk *center*. Oleh karena itu, makalah ini menyajikan hasil penelitian mengenai bifurkasi yang terjadi pada sistem dinamik dimensi 2 dengan 1 parameter yang mempunyai potret fase saat terjadi bifurkasi berbentuk *center*. Jenis bifurkasi ini kemudian disebut sebagai bifurkasi *Hopf* tergeneralisasi. Pemberian nama *Hopf* tergeneralisasi dikarenakan saat terjadi bifurkasi, sistem ini memiliki nilai eigen imajiner murni seperti halnya bifurkasi *Hopf* biasa.

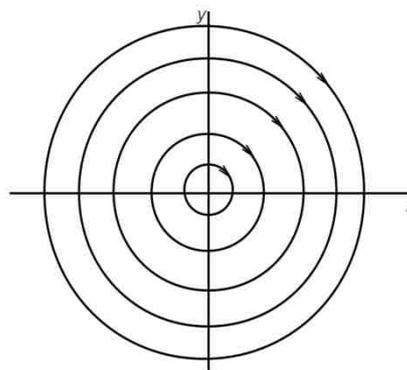
### Metode Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui munculnya bifurkasi *Hopf* tergeneralisasi sebagai akibat dari adanya pemberian gangguan terhadap sistem dinamik dimensi 2 yang mempunyai bentuk potret fase *center*. Sistem yang diberi gangguan mempunyai bentuk

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}\quad (2)$$

Sistem (2) mempunyai bentuk potret fase berupa *center* (Gambar 1).

Gangguan yang diberikan terhadap sistem (2) berbentuk fungsi nonlinier dengan besarnya gangguan dinyatakan sebagai suatu parameter berdimensi satu. Saat tidak ada gangguan (ditunjukkan dengan nilai parameter 0) sistem akan mempunyai bentuk potret fase berupa *center*. Ada banyak macam gangguan yang dapat diberikan, namun dalam makalah ini hanya akan diberikan 2 jenis gangguan saja. Gangguan yang pertama merupakan fungsi dalam variabel  $x$  dan gangguan kedua merupakan fungsi dalam variabel  $y$ . Masing-masing gangguan muncul pada salah satu persamaan dari sistem (2).



**Gambar 1.** Potret fase sistem (2)

Selanjutnya, ada tidaknya suatu bifurkasi diselidiki pada sistem yang telah diberikan gangguan. Bifurkasi diperoleh jika saat parameter tidak bernilai 0, bentuk potret fase yang diperoleh tidak ekuivalen secara topologi dengan bentuk *center*. Munculnya bifurkasi akan dibuktikan secara numerik dan analitik. Untuk menunjukkan terjadinya bifurkasi secara numerik, potret fase dari sistem yang mengalami bifurkasi akan digambarkan untuk tiga nilai parameter yang berbeda. Ketiga nilai parameter tersebut mewakili keadaan sistem saat bifurkasi belum, sedang, dan telah terjadi. Di lain pihak, untuk menunjukkan terjadinya bifurkasi secara analitik dilakukan dengan menggunakan teorema dan lema yang diperoleh.

Teorema dan lema yang diperoleh dalam penelitian ini dibuktikan dengan menggunakan Teorema *Poincare-Bendikson* dan teorema 1.

Diberikan fungsi  $F(x) = \int_0^x f(s) ds$  dengan  $f(x)$  kontinu *Lipschitz* di  $\mathbb{R}$  dan syarat-syarat berikut.

1.  $F(x) = \int_0^x f(s) ds$  adalah sebuah fungsi ganjil,
2.  $F(x) \rightarrow \infty$  untuk  $x \rightarrow \infty$ ,
3. Terdapat  $\beta > 0$  sehingga untuk  $x > \beta$ ,  $F(x) > 0$  dan monoton naik, dan
4. Terdapat konstanta  $\alpha > 0$  sehingga untuk  $0 < x < \alpha$ ,  $F(x) < 0$ .

**Teorema 1** [6]. Jika kondisi 1 – 4 terpenuhi maka persamaan *Liénard*  $\dot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0$  mempunyai paling sedikit satu solusi periodik. Jika  $\alpha = \beta$  maka terdapat tepat satu solusi periodik. Bukti dari teorema ini dapat dilihat di [6].

**Hasil dan Pembahasan**

Untuk mempermudah dalam menyebutkan syarat 1 – 4 di atas, maka diberikan definisi mengenai fungsi ganjil *Liénard* sebagai berikut.

**Definisi 2.** Diberikan fungsi  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dengan  $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ . Fungsi  $F(x)$  disebut sebagai Fungsi Ganjil Liénard (Liénard Odd Function) jika  $f(x)$  kontinu Lipschitz di  $\mathbb{R}$  dan syarat 1 – 4 terpenuhi.

Definisi mengenai fungsi ganjil *Liénard* digunakan dalam teorema berikut

**Teorema 3.** Diberikan sebuah sistem planar autonom

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \pm F(x) \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{3}$$

dengan  $x, y \in \mathbb{R}$ , dan  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Jika  $F(x)$  pada sistem (3) merupakan fungsi ganjil Liénard maka sistem (3) mempunyai solusi periodik.
2. Jika  $F(x)$  merupakan fungsi ganjil Liénard dengan  $\alpha = \beta$  maka sistem (3) mempunyai sebuah limit cycle.

**Bukti**

1. Bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x) \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{4}$$

ekuivalen dengan bentuk persamaan *Liénard* dalam Teorema 1., sehingga bentuk tersebut mempunyai solusi periodik. Selanjutnya akan dibuktikan untuk kasus

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + F(x) \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{4}$$

Sistem (4) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium, yaitu (0,0).

- a. Ekspansi *Taylor* terhadap sistem (4) di sekitar (0,0) menghasilkan bentuk

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + F'(0)x + \dots \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{5}$$

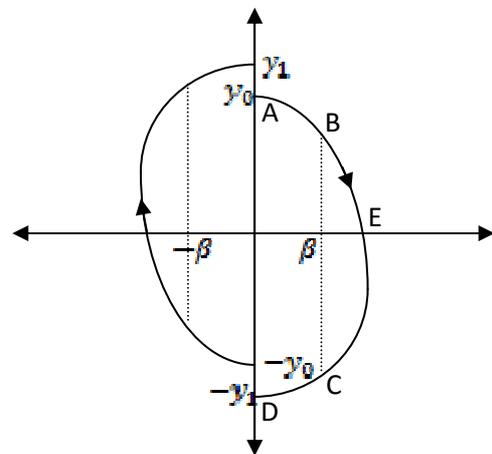
dengan  $F'(0) = f(0)$ . Nilai eigen dari sistem (5) adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} f(0) \pm \frac{1}{2} \sqrt{f^2(0) - 4}.$$

Karena  $f(0) < 0$  maka titik ekuilibrium (0,0) stabil. Dengan kata lain, untuk nilai awal  $(x_0, y_0)$  dengan  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  cukup kecil

maka orbit akan menuju titik ekuilibrium (0,0).

- b. Di lain pihak, orbit dari sistem (4) bergerak horisontal ke kanan saat  $x = 0$  dan  $y > 0$  dan bergerak ke kiri saat  $x = 0$  dan  $y < 0$ . Untuk  $|y|$  cukup besar, pergerakan orbit dari sistem (4) akan memotong garis  $x = \beta$  dan  $x = -\beta$ . Selain itu, untuk  $x > 0$ , saat  $y = -F(x)$  maka orbit dari sistem (4) bergerak vertikal ke bawah dan untuk  $x < 0$ , saat  $y = -F(x)$  maka orbit dari sistem (4) bergerak vertikal ke atas. Sehingga pergerakan orbit akan mempunyai bentuk seperti Gambar 2.



**Gambar 2.** Lintasan orbit sistem (4).

Selanjutnya, tinggal menunjukkan bahwa  $|y_1| > y_0$ , untuk  $y_0$  yang cukup besar

Misalkan

$$R = x^2 + y^2$$

maka

$$\dot{R} = 2(xx' + yy') = 2xF(x). \tag{6}$$

Berdasarkan persamaan (6) dan sistem (4) didapatkan bahwa

$$dR = 2 \frac{x F(x)}{y + F(x)} dx = -2F(x) dy.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} R(0, y_1) - R(0, y_0) &= \int_{ABCD} dR \\ &= \int_{AB} \frac{2xF(x)}{y + F(x)} dx \\ &\quad + \int_{CD} \frac{2xF(x)}{y + F(x)} dx + \int_{BEC} dR \end{aligned}$$

Fungsi  $F(x)$  terbatas untuk  $0 \leq x \leq \beta$  sehingga bentuk yang pertama dan kedua

menuju ke 0 ketika  $y_0 \rightarrow \infty$ . Tulis bentuk integral yang ketiga menjadi

$$\int_{BEC} dR = \int_{BEC} -2F(x) dy$$

Jika  $x > \beta$  maka  $-2F(x) < 0$ . Pada kasus ini, bentuk integral dibawa dari nilai  $y$  positif ke  $y$  negatif sehingga hasil integralnya pasti positif. Dengan demikian didapatkan

$$R(0, y_1) - R(0, y_0) > 0$$

Jika  $x < -\beta$  maka  $-2F(x) > 0$ . Pada kasus ini, bentuk integral dibawa dari nilai  $y$  negatif ke  $y$  positif sehingga hasil integralnya pasti positif. Dengan demikian didapatkan

$$R(0, y_1) - R(0, y_0) > 0.$$

Sehingga terbukti bahwa  $|y_1| > y_0$ .

Berdasar hasil tersebut, dapat diketahui bahwa untuk nilai awal  $(x_0, y_0)$ , dengan  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  cukup kecil, maka pergerakan orbit akan menuju titik ekuilibrium (0,0). Sedangkan untuk  $y_0$  cukup besar maka pergerakan orbit akan menjauhi titik ekuilibrium (0,0). Sehingga dapat disimpulkan adanya solusi periodik.

2. Pada kasus  $\alpha = \beta$

Ambil sebarang  $y_1 > 0$  dan  $y_2 < 0$  sebagai nilai awal. Orbit dari sistem akan bergerak seperti pada Gambar 3.

a. Jika orbit memotong sumbu  $x$  di titik  $(x_1, 0)$ , dengan  $0 < x_1 < \alpha$  maka kurva  $K_1$  tidak memotong garis  $x = \alpha$ . Selanjutnya karena  $F(x) < 0$  untuk  $0 < x < \alpha$  dan  $y$  bergerak dari positif ke negatif maka

$$R_C - R_A = \int_{ABC} -2F(x) dy < 0.$$

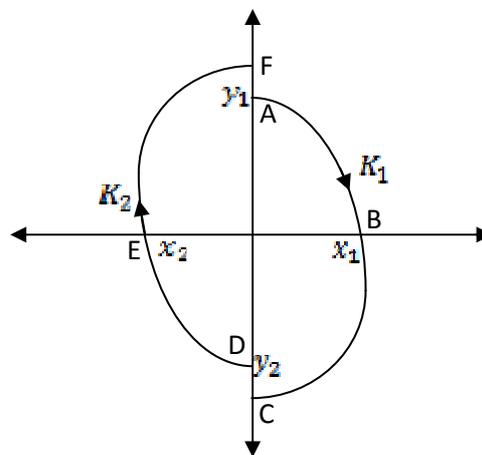
Jika orbit memotong sumbu  $x$  di titik  $(x_2, 0)$ , dengan  $-\alpha < x_2 < 0$  maka kurva  $K_2$  tidak memotong garis  $x = -\alpha$ . Selanjutnya karena  $F(x) > 0$  untuk  $-\alpha < x < 0$  dan  $y$  bergerak dari negatif ke positif maka

$$R_F - R_D = \int_{DEF} -2F(x) dy < 0.$$

Dengan demikian tidak ada solusi periodik yang dapat dimulai dari titik  $(x_0, 0)$  dengan  $0 < |x_0| < \alpha$ .

b. Untuk kasus orbit memotong sumbu  $x$  di titik  $(x_1, 0)$  dengan  $x_1 \geq \alpha$ . Saat  $0 < x < \alpha$ , nilai  $F(x) < 0$ . Di lain pihak, untuk nilai  $x \geq \alpha$ , fungsi  $F(x)$  monoton naik dan  $F(x) \geq 0$ . Sehingga hanya ada satu nilai  $y_1$  yang dapat menyebabkan  $R_C = R_A$ .

Demikian juga untuk kasus orbit yang memotong sumbu  $x$  di titik  $(x_2, 0)$  dengan  $x_2 \leq -\alpha$ . Saat  $-\alpha < x < 0$ , nilai  $F(x) > 0$ . Di lain pihak, untuk nilai  $x \leq -\alpha$ , fungsi  $F(x)$  monoton turun dan  $F(x) \leq 0$ . Sehingga hanya ada satu nilai  $y_2$  yang dapat menyebabkan  $R_F = R_D$ .



Gambar 3. Lintasan orbit sistem (4).

Berdasarkan kenyataan tersebut, dapat disimpulkan bahwa hanya ada satu solusi periodik. ■

A. Gangguan Tipe 1

Jenis gangguan pada tipe ini berupa sebarang fungsi  $G(y)$  yang muncul pada persamaan kedua dari sistem (2). Setelah diberikan gangguan, sistem (2) akan berubah menjadi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \mu G(y) \end{aligned} \tag{7}$$

dengan  $\mu$  sebuah parameter bernilai real.

Skenario ini sebenarnya akan sama juga dengan memberikan gangguan berupa sebarang fungsi  $F(x)$  pada persamaan pertama dari sistem (2). Sistem yang diperoleh mempunyai bentuk berbeda dengan sistem (7), yaitu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \mu F(x) \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{8}$$

Namun sebenarnya sistem (8) ekuivalen dengan sistem (7). Hal ini dinyatakan dalam lema berikut.

**Lema 4.** Sistem (8) ekuivalen dengan sistem (7).

**Bukti.** Jika persamaan kedua pada sistem (8) diturunkan terhadap  $t$  kemudian hasilnya disubstitusikan ke persamaan pertama dari sistem (8) maka akan diperoleh

$$\dot{y} = -y - \mu F(-y). \tag{9}$$

Misalkan  $x_1 = y$  dan  $x_2 = \dot{y}$ , substitusi pemisalan tersebut ke persamaan (9) diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu G(x_2). \end{aligned}$$

dengan  $G(x_2) = -F(-x_2)$ . ■

**Teorema 5.** Jika fungsi  $F(x)$  pada sistem (8) merupakan fungsi ganjil Liénard dengan  $\alpha = \beta$  maka pada sistem (8) tersebut terjadi bifurkasi Hopf tergeneralisasi, yaitu potret fase disekitar titik ekuilibrium saat terjadi bifurkasi berbentuk center.

**Bukti.** Sistem (8) mempunyai potret fase berupa center saat  $\mu = 0$ . Berdasar Teorema 3.2., sistem (8) mempunyai sebuah limit cycle saat  $\mu \neq 0$ . Sehingga telah terjadi perubahan potret fase dari mempunyai banyak solusi periodik (saat  $\mu = 0$ ) menjadi hanya mempunyai satu solusi periodik (saat  $\mu \neq 0$ ). Jadi sistem (8) mengalami bifurkasi Hopf tergeneralisasi. ■

Perpaduan antara Teorema 5 dan Lema 4 menghasilkan akibat berikut.

**Akibat 6.** Jika fungsi  $G(y)$  pada sistem (7) merupakan fungsi ganjil Liénard dengan  $\alpha = \beta$  maka pada sistem tersebut terjadi bifurkasi Hopf tergeneralisasi.

**Bukti.** Berdasarkan Lema 4. dan Teorema 5. maka disimpulkan bahwa pada sistem (7) terjadi bifurkasi Hopf tergeneralisasi. ■

**Contoh 1.** Diberikan persamaan diferensial

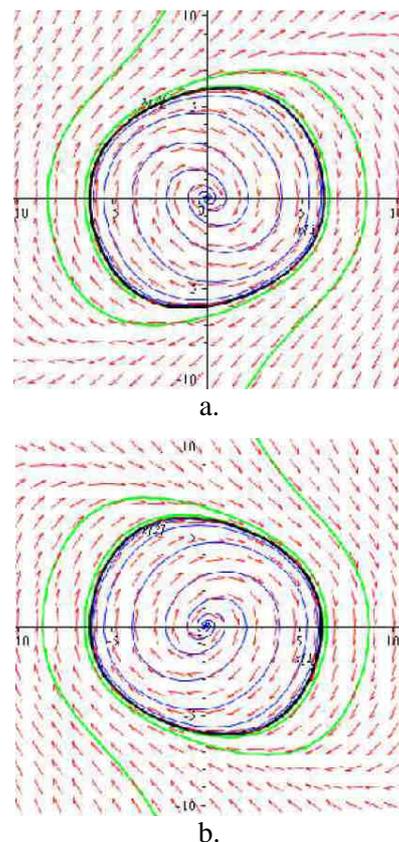
$$\ddot{x} + \mu \frac{1}{27}(\dot{x})^3 - \mu \dot{x} + x = 0, \tag{10}$$

dengan  $\mu \in \mathbb{R}$ . Untuk  $\mu > 0$ , persamaan ini dikenal dengan nama persamaan Rayleigh.

Misalkan  $y = \dot{x}$ , disubstitusi ke sistem (10) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \theta G(y), \end{aligned} \tag{11}$$

dengan  $\theta = -\mu$  dan  $G(y) = \frac{1}{27}y^3 - y$ . Fungsi  $G(y)$  merupakan fungsi ganjil Liénard dengan  $\alpha = \beta$ , maka berdasarkan Akibat 6. dapat diketahui bahwa pada sistem (11) terjadi bifurkasi Hopf tergeneralisasi. Potret fase dari sistem (11) saat  $\theta < 0$  dan  $\theta > 0$  dapat dilihat pada Gambar 4, sedangkan saat  $\theta = 0$  dapat dilihat pada Gambar 1.



**Gambar 4.** Potret fase sistem (11). a. untuk  $\theta > 0$  dan b. untuk  $\theta < 0$ .

**B. Gangguan Tipe 2**

Memberikan gangguan berupa sebarang fungsi  $g(y)$  pada persamaan pertama dari sistem (2), sehingga sistem (2) akan berubah menjadi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \mu g(y)x \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{12}$$

dengan  $\mu$  adalah sebuah parameter bernilai real. Skenario ini sebenarnya akan sama juga dengan memberikan gangguan berupa sebarang fungsi  $f(x)$  pada persamaan kedua dari sistem (2).

Sistem yang diperoleh akan berbeda dengan sistem (12), yaitu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ (13) \quad \dot{y} &= -x + \mu f(x)y. \end{aligned}$$

Namun sebenarnya sistem (13) ekuivalen dengan sistem (12).

**Lema 7.** Sistem (13) ekuivalen dengan sistem (12).

**Bukti.** Perhatikan sistem (12), jika persamaan kedua diturunkan terhadap  $t$  dan hasilnya disubstitusikan ke persamaan pertama maka diperoleh

$$\ddot{y} = -y - \mu g(y)\dot{y}. \tag{14}$$

Misalkan  $x_1 = y$  dan  $x_2 = \dot{y}$ . Substitusi pemisalan tersebut ke persamaan (14) maka didapatkan

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \mu f(x_1)x_2 \end{aligned}$$

dengan  $f(x_1) = g(x_1)$ . ■

**Lema 8.** Sistem (13) ekuivalen dengan sistem (8).

**Bukti.** Jika persamaan pertama pada sistem (13) diturunkan terhadap  $t$  dan kemudian hasilnya disubstitusikan ke persamaan kedua maka diperoleh

$$\ddot{x} = -x + \mu f(x)\dot{x}. \tag{15}$$

Misalkan  $y = \dot{x} - \mu F(x)$ , dengan  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ , substitusi ke persamaan (15) diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \mu F(x) \\ \dot{y} &= -x. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Akibat 9.** Diberikan sistem (13) dengan fungsi  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ . Jika fungsi  $F(x)$  merupakan fungsi ganjil Liénard dengan  $\alpha = \beta$  maka pada sistem (13) terjadi bifurkasi Hopf tergeneralisasi.

**Bukti.** Berdasarkan Lema 8 diketahui bahwa sistem (13) ekuivalen dengan sistem (8). Selanjutnya berdasarkan Teorema 5, dapat diperoleh bahwa pada sistem (13) terjadi bifurkasi Hopf tergeneralisasi. ■

**Contoh 2.** Diberikan persamaan diferensial

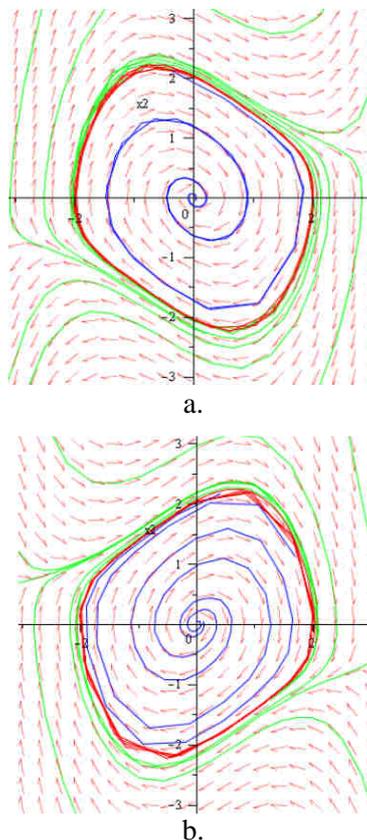
$$\dot{x} + \mu x^2 \dot{x} - \mu \dot{x} + x = 0, \tag{16}$$

dengan  $\mu \in \mathbb{R}$ . Untuk  $\mu > 0$ , persamaan ini dikenal sebagai persamaan Van der Pol.

Misalkan  $y = \dot{x}$ , substitusi ke persamaan (16) diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ (17) \quad \dot{y} &= -x + \theta f(x)y. \end{aligned}$$

dengan  $\theta = -\mu$  dan  $f(x) = x^2 - 1$ . Fungsi  $F(x) = \int_0^x f(s)ds$  merupakan fungsi ganjil Liénard dengan  $\alpha = \beta$  maka menurut Akibat 9., pada sistem (13) terjadi bifurkasi Hopf tergeneralisasi. Potret fase dari sistem (17) saat  $\theta < 0$  dan  $\theta > 0$  dapat dilihat pada Gambar 5, sedangkan saat  $\theta = 0$  dapat dilihat pada Gambar 1.



**Gambar 5.** Potret fase sistem (17). a. untuk  $\theta > 0$  dan b. untuk  $\theta < 0$ .

### Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa gangguan terhadap sistem dengan potret fase berbentuk center dapat menyebabkan berubahnya bentuk center menjadi

potret fase dengan *limit cycle*. Jenis perubahan potret fase yang seperti ini kemudian disebut sebagai bifurkasi *Hopf* tergeneralisasi.

### Ucapan Terima Kasih

Dana penelitian ini diperoleh dari dana DIPA FMIPA UNY dengan nomor kontrak 2549/UN34.13/PL/2013.

### Pustaka

- [1] Burroughs, N.J., Ferreira, M., Oliveira, B.M.P.M., dan Pinto, A.A. (2011) A Transcritical Bifurcation in an Imune Response Model. *Journal of Differential Equations and Applications*. Volume 17 (No.7). pp. 1101-1106. ISSN 1023-6198. DOI: 10.1080/10236190903095291.
- [2] Chen, Y.M. dan Liu, J.K. (2008) Supercritical as well as subcritical Hopf bifurcation in nonlinear flutter systems. *Jurnal Applied Mathematics and Mechanics.-Engl. Ed.*, 2008, 29(2):199206 DOI: 10.1007/s10483-008-0207-x.
- [3] Hartono dan Krisnawan, K.P. (2013) Bifurkasi Pitchfork pada Sistem Flutter Sayap Pesawat Terbang. *Jurnal Sains Dasar*. Vol. 2 No. 2. Terbitan FMIPA UNY. Oktober 2013..
- [4] Kuznetsov, Y.A. (1998) *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Second edition. Springer-Verlag New York, Inc.
- [5] Perko, L. (2001) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag: New York.
- [6] Verhulst, F. (1996) *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Second Edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [7] Wiggins, S. (2003) *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition. Springer-Verlag New York, Inc.
- [8] Yet, N.Y., Son, D.T., Jäger, T., dan Siegmund, S. (2011) Nonautonomous Saddle-node Bifurcations in the Quasiperiodically Forced Logistic Map. *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 21.147. DOI: 10.1142/S021812 7411029124