PENYELESAIAN MASALAH TRANSPORTASI *FUZZY* DENGAN METODE PENDEKATAN MONALISHA PADA DISTRIBUSI AIR PERUSAHAAN DAERAH AIR MINUM (PDAM) TIRTAMARTA

SOLVING FUZZY TRANSPORTATION PROBLEM USING MONALISHA'S APPROXIMATION METHOD FOR WATER DISTRIBUTION IN REGIONAL DRINKING WATER COMPANY OF TIRTAMARTA

Agung Budi Wirawan*, Karyati

Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta 55281, Indonesia

*email korespondensi: agungbudiwirawan13@gmail.com

Abstrak

Masalah transportasi *fuzzy* merupakan suatu pengembangan dari masalah transportasi biasa. Tujuan dari masalah transportasi *fuzzy* adalah menentukan jadwal pengiriman yang meminimalkan total biaya transportasi (pengeluaran), dengan tetap memenuhi ketidakpastian dari parameter keputusan. Terdapat beberapa metode penyelesaian awal yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah transportasi *fuzzy*, seperti Metode Pendekatan Monalisha. Penerapan penyelesaian masalah transportasi *fuzzy* banyak dilakukan pada permasalahan kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah pada pendistribusian air dengan area berskala besar khususnya pada Perusahaan Daerah Air Minum di suatu daerah, karena terdapat banyak faktor yang mempengaruhi proses distribusi tersebut. Oleh karena itu, diperlukan studi kasus untuk menerapkan penyelesaian masalah transportasi *fuzzy* pada masalah distribusi air, dengan lokasi studi kasus di Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirtamarta Yogyakarta. Tahapan awal adalah dengan mengkaji model masalah transportasi *fuzzy* dan metode pendekatan Monalisha sebagai metode penyelesaian awal, serta metode *fuzzy stepping stone* untuk menguji keoptimalan penyelesaian awal. Tahapan selanjutnya adalah penerapan masalah transportasi *fuzzy* untuk menyelesaikan masalah distribusi air di PDAM Tirtamarta, yaitu dengan mengidentifikasi masalah aktual, merumuskan masalah menjadi model masalah transportasi *fuzzy,* menentukan penyelesaian awal, menguji keoptimalan penyelesaian awal, melakukan analisis hasil, dan membuat kesimpulan.

Kata kunci: masalah transportasi, bilangan *fuzzy*, metode pendekatan Monalisha

Abstract

The fuzzy transportation problem is an improvement for transportation problem. The purpose of the fuzzy transportation problem is to determine a delivery schedule that minimizes the total transportation costs (expenses), while satisfying the uncertainty of the decision parameters. There are several initial solution methods that can be used in solving fuzzy transportation problems, one of them is the Monalisha's approximation method. The application of fuzzy transportation problems solution is widely used in everyday life problems. One of them is the distribution of water in a large-scale area, especially in a Regional Drinking Water Company in an area, because there are many factors that affect the distribution process. Therefore, a case study is needed to apply the solution of the fuzzy transportation problem to the problem of water distribution, with the chosen location of the case study is at the Regional Drinking Water Company (PDAM) Tirtamarta Yogyakarta. The initial stage is to examine the fuzzy transportation problem model and the Monalisha's approximation method as the initial solution method, as well as the Fuzzy Stepping Stone method to test the optimization of the initial solution. The next stage is the application of fuzzy transportation problems to solve water distribution problems in PDAM Tirtamarta, namely by identifying the actual problems, formulating the problems into a fuzzy transportation problem model, determining the initial solution, testing the optimization of the initial settlement, analyzing the results, and making conclusions.

Keywords: transportation problem, fuzzy numbers, Monalisha's approximation method

Pendahuluan

Masalah transportasi merupakan salah satu masalah khusus dalam program linear. Program linear merupakan teknik aplikasi matematika dalam menentukan pemecahan masalah yang bertujuan memaksimumkan atau meminimumkan sesuatu yang dibatasi batasan-batasan tertentu. Hal ini dikenal juga sebagai teknik optimalisasi [1]. Pengembangan teknik optimalisasi juga dilakukan dalam masalah transportasi. Pada tahun 1939, L. V. Kantorovitch mempelajari model transportasi dan pada tahun 1941, F. L. Hitchcock merumuskan model matematika dari persoalan transportasi yang sekarang dianggap sebagai model baku [2]. Masalah transportasi merupakan permasalahan yang berkaitan dengan pendistribusian suatu komoditas atau produk dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan.

Seiring perkembangan ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang matematika, penerapan masalah transportasi juga ikut mengalami perkembangan dengan ditandai adanya perubahan paradigma. Perubahan paradigma berkaitan dengan kendala ketidakpastian yang mulai diperhitungkan keberadaannya. Beberapa kendala memungkinkan ketidakpastian tersebut, seperti ketidakpastian data akibat dari kebijakan perusahaan maupun kurangnya informasi. Salah satunya adalah pengoptimalan proses distribusi air Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirtamarta yang mengalami kendala ketidakpastian seperti ketidakpastian permintaan konsumen, ketidakpastian ketersediaan air di sumber air, dan naik turunnya harga (biaya) listrik.

Untuk menangani ketidakpastian informasi dalam membuat keputusan, L. A. Zadeh memperkenalkan konsep ketidakpastian atau *fuzzy*. Konsep *fuzzy* sering digunakan dalam masalah transportasi, yang dikenal sebagai masalah transportasi *fuzzy*. Masalah transportasi *fuzzy* merupakan masalah transportasi yang parameter keputusannya berupa bilangan *fuzzy* [3]. Bilangan *fuzzy* merupakan salah satu penggambaran matematis untuk ungkapan-ungkapan *mendekati*, *hampir*, atau *sekitar* [4-6]. Pada penelitian ini, bilangan *fuzzy* yang akan digunakan sebagai nilai estimasi setiap parameter masalah transportasi *fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* trapesium [6].

Metode untuk menentukan penyelesaian masalah transportasi *fuzzy* telah dikembangkan oleh beberapa peneliti. Pada penelitian ini, akan digunakan metode pendekatan Monalisha [7,8] sebagai metode untuk menentukan penyelesaian awal yang layak, dan metode *fuzzy stepping stone* [9] untuk melakukan uji keoptimalan penyelesaian awal. Kedua metode tersebut dipilih karena dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian yang optimal dari masalah transportasi *fuzzy*, dengan algoritma atau tahapan yang sederhana. Dalam penggunaan kedua metode tersebut, juga akan digunakan fungsi *ranking* untuk mempermudah dalam melaksanakan tahapan kedua metode tersebut. Pada penelitian ini, akan digunakan fungsi *ranking* dengan metode *magnitude* [8,10].

Berdasarkan kondisi yang telah diuraikan, tujuan penelitian ini adalah menerapkan penyelesaian masalah transportasi *fuzzy* untuk menyelesaikan masalah pada distribusi air PDAM Tirtamarta sehingga biaya distribusi menjadi minimal menggunakan metode pendekatan Monalisha, metode *fuzzy steppingstone*, dan fungsi *ranking* dengan metode *magnitude* pada bilangan *fuzzy* untuk membantu penyelesaian.

Metode Penelitian

Objek Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirtamarta yang beralamat di Jalan W. Mongisidi No. 3 Yogyakarta, untuk mendapatkan informasi mengenai data distribusi air di PDAM Tirtamarta. Data yang digunakan adalah data distribusi air PDAM Tirtamarta pada tahun 2019.

Prosedur Penelitian

Penelitian ini memiliki tiga tahapan penelitian. Tahapan pertama adalah proses pengkajian bilangan *fuzzy*, model masalah transportasi *fuzzy*, metode pendekatan Monalisha, dan metode *fuzzy stepping stone*. Selain itu, dilakukan identifikasi permasalahan aktual pada distribusi air PDAM Tirtamarta dan data penelitian yang akan digunakan. Tahapan kedua adalah pengambilan data, dan tahapan ketiga adalah pengolahan atau analisis data.

Teknik Pengambilan Data

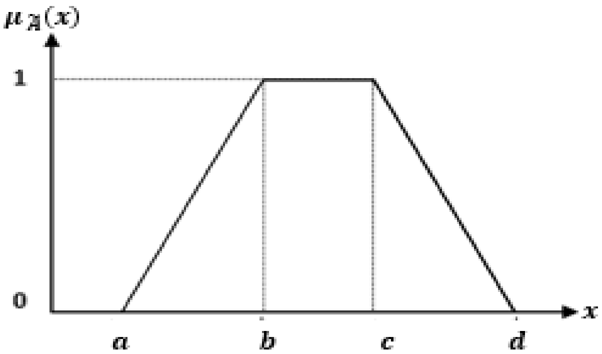
Pada permasalahan distribusi air PDAM Tirtamarta, dilakukan pengambilan data untuk menjadi parameter permasalahan berdasarkan buku arsip bulanan Bagian Produksi PDAM Tirtamarta tahun 2019, yaitu data kapasitas persediaan air reservoir, data jumlah permintaan daerah tujuan (konsumen), dan biaya listrik untuk melakukan setiap distribusi.

Teknik Analisis Data

Setiap data yang diperoleh akan diformulasikan menjadi data berbentuk bilangan *fuzzy* trapesium. Diberikan fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$. Bilangan *fuzzy* $\tilde{A} = (a, b, c, d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dikatakan bilangan *fuzzy* trapesium jika fungsi keanggotaan memenuhi kondisi seperti yang ditunjukkan pada persamaan (1) berikut [6].

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{untuk } x \text{ yang lainnya} \end{cases} \qquad (1)$$

Fungsi keanggotaan trapesium dapat diilustrasikan dalam bentuk grafik kurva yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Grafik fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* trapesium

Data yang telah berbentuk bilangan *fuzzy* trapesium kemudian dirumuskan dalam model masalah transportasi *fuzzy*. Bentuk umum untuk model masalah transportasi *fuzzy* dapat ditunjukkan pada persamaan (2) sampai (4) [8]. Fungsi tujuan (meminimumkan) dapat ditunjukkan seperti pada persamaan (2).

$$\tilde{Z} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{c}_{ij} \otimes \tilde{x}_{ij} \right) \tag{2}$$

Sementara itu, fungsi kendala dapat disajikan seperti pada persamaan (3) dan (4).

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} = \tilde{a}_i \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} = \tilde{b}_j \tag{4}$$

Persamaan (3) dan (4) berlaku jika $\tilde{x}_{ij} \geq \tilde{0}, \tilde{a}_i \geq 0, \tilde{b}_j \geq 0$. Lebih lanjut, $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$.

Penjelasan notasi pada model yaitu $\tilde{a}_i$ merupakan banyak persediaan *fuzzy* pada sumber ke- i. $\tilde{b}_j$ merupakan banyak permintaan *fuzzy* tujuan ke- j. $\tilde{x}_{ij}$: merupakan banyak barang *fuzzy* yang didistribusikan dari sumber ke-i ke tujuan ke-j. $\tilde{c}_{ij}$ merupakan biaya distribusi *fuzzy* dari sumber ke-i ke tujuan ke-j. Sementara itu, $\tilde{Z}$ merupakan total biaya distribusi *fuzzy*. Model masalah transportasi *fuzzy* yang diperoleh akan diubah ke bentuk tabel transportasi *fuzzy*. Bentuk umum dari tabel transportasi ditunjukkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Tabel model masalah transportasi *fuzzy*

	1	**2**	**...**	$\boldsymbol{n}$	***Supply***
1	$\tilde{c}_{11}$ $\tilde{x}_{11}$	$\tilde{c}_{12}$ $\tilde{x}_{12}$	...	$\tilde{c}_{1n}$ $\tilde{x}_{1n}$	$\tilde{a}_1$
2	$\tilde{c}_{21}$ $\tilde{x}_{21}$	$\tilde{c}_{22}$ $\tilde{x}_{22}$	...	$\tilde{c}_{2n}$ $\tilde{x}_{2n}$	$\tilde{a}_2$
...	...			...	...
m	$\tilde{c}_{m1}$ $\tilde{x}_{m1}$	$\tilde{c}_{m2}$ $\tilde{x}_{m2}$	...	$\tilde{c}_{mn}$ $\tilde{x}_{mn}$	$\tilde{a}_m$
Demand	$\tilde{b}_1$	$\tilde{b}_2$	...	$\tilde{b}_n$	

Kemudian, model masalah transportasi *fuzzy* ditentukan penyelesaian awal yang layak menggunakan metode pendekatan Monalisha, dengan tahapan sebagai berikut [7,8]. (1) Menentukan model masalah transportasi *fuzzy* dari masalah aktual. (2) Menentukan tabel transportasi dari model masalah transportasi *fuzzy*. (3) Menentukan tabel transportasi yang baru, dengan mengubah setiap parameter, yaitu biaya, persediaan, dan permintaan, menjadi bilangan *real* menggunakan metode *magnitude*.

Dalam tabel transportasi yang baru, jumlah persediaan dan permintaan *fuzzy* tetap dituliskan, agar saat pengalokasian barang tetap berupa bilangan *fuzzy*. (4) Menentukan nilai $\Re(\tilde{c}_{ij})$ terkecil pada setiap baris dari tabel transportasi, kemudian kurangi $\Re(\tilde{c}_{ij})$ pada setiap baris dengan nilai tersebut. (5) Menentukan nilai $\Re(\tilde{c}_{ij})$ terkecil pada setiap kolom dari tabel transportasi, kemudian kurangi $\Re(\tilde{c}_{ij})$ pada setiap kolom dengan nilai tersebut. (6) Menentukan nilai $\Re(\tilde{c}_{ij})$ terkecil pertama dan terkecil kedua untuk setiap baris dan setiap kolom.

Kemudian hitung selisih (*penalty*) dari kedua nilai $\Re(\tilde{c}_{ij})$ tersebut. (7) Menentukan selisih (*penalty*) terbesar antara semua baris dan kolom. Misalkan perbedaan terbesar pada baris ke-j dan nilai $\Re(\tilde{c}_{ij})$ adalah 0 pada baris ke-i. Alokasikan jumlah maksimum yang sesuai untuk sel $\tilde{x}_{ij}$, yaitu $\tilde{x}_{ij} = \min(\tilde{a}_i, \tilde{b}_j)$ di sel ke-(i, j). Dalam pengalokasian dipilih nilai minimal antara persediaan dan permintaan, karena nilai minimal tersebut merupakan jumlah maksimum persediaan yang dapat diterima oleh suatu tujuan atau jumlah maksimum permintaan yang dapat dipenuhi oleh suatu sumber. (8) Memperhatikan batas persediaan $(\tilde{a}_i)$ yang sudah terpenuhi atau batas permintaan $(\tilde{b}_j)$ sudah terpenuhi.

Reduksi baris atau kolom tersebut dan buat tabel transportasi yang baru. Reduksi baris atau kolom merupakan penghapusan baris atau kolom dari tabel transportasi. (9) Mengulangi langkah 4 sampai 8, sedemikian hingga semua batas permintaan terpenuhi atau persediaan dialokasikan. Pada penyelesaian awal layak dilakukan uji keoptimalan untuk mengetahui apakah penyelesaian awal tersebut dapat menjadi penyelesaian yang optimal. Uji keoptimalan menggunakan metode *fuzzy stepping Stone*, dengan tahapan sebagai berikut [9]. (1) Menentukan tabel solusi penyelesaian yang layak, dengan elemen biaya $(\tilde{c}_{ij})$ dalam tabel penyelesaian tersebut diubah menjadi bilangan *real* menggunakan fungsi *ranking* $\Re(\tilde{c}_{ij})$. (2) Mengevaluasi variabel nonbasis.

Pengujian variabel nonbasis dilakukan dengan langkah berikut. (a) Menentukan variabel nonbasis yang akan diuji dan (b) memulai dari sel tersebut, buatlah lintasan tertutup (*loop*). (c) Memberikan tanda positif $(+)$ dan negatif $(-)$ secara bergantian pada $\Re(\tilde{c}_{ij})$ di *steppingstone*. Pemberian tanda dimulai dengan tanda positif pada variabel nonbasis yang akan diuji. (d) Menghitung $\Re\left(\tilde{Z} - \Re(\tilde{c}_{ij})\right)$ pada lintasan tertutup dengan menambahkan setiap nilai $\Re(\tilde{c}_{ij})$ dengan memuat tanda positif dan negatifnya. (e) Mengulangi langkah a sampai langkah d, sehingga $\Re\left(\tilde{Z} - \Re(\tilde{c}_{ij})\right)$ pada setiap variabel non basis terhitung. (f) Memeriksa hasil perhitungan $\Re\left(\tilde{Z} - \Re(\tilde{c}_{ij})\right)$. Jika semua $\Re\left(\tilde{Z} - \Re(\tilde{c}_{ij})\right) \geq 0$, maka solusi penyelesaian sudah optimal.

Jika tidak, maka dilakukan perbaikan solusi dengan mengubah alokasi barang. (g) Memilih variabel nonbasis dengan $\Re\left(\tilde{Z} - \Re(\tilde{c}_{ij})\right)$ terkecil atau negatif terbesar. Tentukan nilai barang terbesar dari variabel basis dengan $\Re(\tilde{c}_{ij})$ bertanda negatif pada lintasan tertutup yang telah dibuat dengan variabel nonbasis tersebut. Tambahkan sel yang $\Re(\tilde{c}_{ij})$ bertanda positif dengan nilai barang tersebut dan kurangkan sel yang $\Re(\tilde{c}_{ij})$ bertanda negatif dengan nilai barang tersebut. (h) Mengulangi langkah 2 hingga mendapatkan solusi penyelesaian yang optimal.

Pada tahapan menentukan penyelesaian optimal, fungsi *ranking* metode *magnitude* juga digunakan untuk membantu dalam tahapan metode pendekatan Monalisha dan metode *fuzzy stepping stone*. Diberikan $\tilde{A}$ sebagai bilangan *fuzzy* trapesium, dengan $\tilde{A} = (a, b, c, d)$. Didefinisikan metode *magnitude* yang memetakan bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ dengan nilai pada bilangan real seperti yang ditunjukkan pada persamaan (5) berikut [8,10].

$$\Re(\tilde{A}) = \frac{a + 5b + 5c + d}{12} \qquad (5)$$

Setelah penyelesaian yang optimal ditemukan, maka akan disimpulkan dan dilakukan interpretasi dari hasil penyelesaian tersebut.

Hasil dan Pembahasan

Studi Kasus

Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirtamarta memiliki tugas untuk mendistribusikan air bersih ke berbagai daerah di Daerah Istimewa Yogyakarta. PDAM Tirtamarta memiliki beberapa reservoir sebagai tempat penampungan air sebelum didistribusikan dan beberapa daerah tujuan sebagai daerah yang menjadi tujuan dari pendistribusian air tersebut. Dalam menjalankan pendistribusiannya, PDAM Tirtamarta mengeluarkan sejumlah tarif atau biaya distribusi. Salah satu biaya distribusinya adalah biaya listrik untuk menjalankan sistem pompa, yang kemudian dialirkan melalui pipa transmisi yang terhubung dari reservoir ke daerah tujuan. Tabel 2 hingga Tabel 5 menunjukkan data reservoir, daerah tujuan, dan biaya listrik pada tahun 2019.

Tabel 2. Data kapasitas reservoir (per bulan) milik PDAM Tirtamarta

Reservoir	Persediaan (m^3)
Padasan	75.000 – 140.000
Candi	145.000 – 180.000
Gemawang	340.000 – 380.000
Karanggayam	100.000 – 145.000
Kotagede	30.000 – 50.000
Pengok	50.000 – 60.000
Bedog	20 – 350.000

Tabel 3. Data jalur distribusi PDAM Tirtamarta

Reservoir	Daerah Tujuan
Padasan Candi	Zona 1
Gemawang Pengok	Zona 2
Bedog Kotagede	Zona 3
Karanggayam	Zona 4

Daerah dari setiap zona yaitu zona 1 terdiri dari Wonosalam, Perum Sukoharjo, Kabulrejo, IDI, Degolan, Perum Merapi View, Dayu, Banteng, Kaliurang Pratama, Asrama 403, Perum Sono, Pogung Baru, Pogung Rejo, Kentungan Barat, Kentungan Timur, dan UPN. Zona 2 terdiri dari Jalan Magelang, Sidomulyo, Kampung Nandan, Kota bagian tengah, serta Balaikota dan sekitarnya. Zona 3 terdiri dari Jalan Hos Cokroaminoto, Kota bagian selatan, serta Kecamatan Kotagede & sekitarnya. Sementara itu, zona 4 terdiri dari Kota bagian timur.

Tabel 4. Data permintaan daerah tujuan (per bulan) PDAM Tirtamarta

Daerah Tujuan	Permintaan (m^3)
Zona 1	170.000 – 240.000
Zona 2	270.000 – 500.000
Zona 3	310.000 – 400.000
Zona 4	100.000 – 145.000

Tabel 5. Biaya listrik (per bulan) PDAM Tirtamarta

Reservoir	Tujuan	Biaya per m^3
Padasan	Zona 1	Rp. 160,00 – Rp. 270,00
Candi	Zona 1	Rp. 175,00 – Rp. 210,00
Gemawang	Zona 2	Rp. 190,00 – Rp. 205,00
Karanggayam	Zona 4	Rp. 165,00 – Rp. 230,00
Kotagede	Zona 3	Rp. 170,00 – Rp. 225,00
Pengok	Zona 2	Rp. 180,00 – Rp. 210,00
Bedog	Zona 3	Rp. 185,00 – Rp. 205,00

Berdasarkan kondisi tersebut, permasalahan yang muncul pada distribusi air PDAM Tirtamarta adalah bagaimana menentukan alokasi pendistribusian air yang paling optimal atau efektif, sehingga PDAM mengeluarkan total biaya distribusi yang minimal dengan tetap memperhatikan kapasitas persediaan setiap reservoir dan permintaan dari setiap daerah tujuan.

Asumsi yang Digunakan

Asumsi yang digunakan pada masalah distribusi air pada PDAM Tirtamarta, yaitu distribusi dilakukan secara terus-menerus (*kontinyu*). Jalur pendistribusian hanya menggunakan pipa transmisi. Semua persediaan setiap reservoir dapat dialokasikan. Semua permintaan daerah tujuan dapat dipenuhi. Biaya distribusi yang digunakan hanya biaya listrik.

Pemodelan Permasalahan Distribusi Air PDAM Tirtamarta

Variabel keputusan yang digunakan adalah sebagai berikut.

$\tilde{x}_{11}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Padasan ke Zona 1
$\tilde{x}_{12}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Padasan ke Zona 2
$\tilde{x}_{13}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Padasan ke Zona 3
$\tilde{x}_{14}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Padasan ke Zona 4
$\tilde{x}_{21}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Candi ke Zona 1
$\tilde{x}_{22}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Candi ke Zona 2
$\tilde{x}_{23}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Candi ke Zona 3
$\tilde{x}_{24}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Candi ke Zona 4
$\tilde{x}_{31}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Gemawang ke Zona 1
$\tilde{x}_{32}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Gemawang ke Zona 2
$\tilde{x}_{33}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Gemawang ke Zona 3
$\tilde{x}_{34}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Gemawang ke Zona 4
$\tilde{x}_{41}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Karanggayam ke Zona 1
$\tilde{x}_{42}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Karanggayam ke Zona 2
$\tilde{x}_{43}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Karanggayam ke Zona 3
$\tilde{x}_{44}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Karanggayam ke Zona 4
$\tilde{x}_{51}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Kotagede ke Zona 1
$\tilde{x}_{52}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Kotagede ke Zona 2
$\tilde{x}_{53}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Kotagede ke Zona 3
$\tilde{x}_{54}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Kotagede ke Zona 4
$\tilde{x}_{61}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Pengok ke Zona 1
$\tilde{x}_{62}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Pengok ke Zona 2
$\tilde{x}_{63}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Pengok ke Zona 3
$\tilde{x}_{64}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Pengok ke Zona 4
$\tilde{x}_{71}$: Bilangan fuzzy untuk banyak distribusi air dari Bedog ke Zona 1
$\tilde{x}_{72}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Bedog ke Zona 2
$\tilde{x}_{73}$: Bilangan *fuzzy* untuk banyak distribusi air dari Bedog ke Zona 3

$\tilde{x}_{74}$: Bilangan fuzzy untuk banyak distribusi air dari Bedog ke Zona 4

Tujuan yang ingin dicapai adalah meminimalkan biaya distribusi air dari setiap reservoir ke setiap tujuan. Pada permasalahan ini, model masalah transportasi *fuzzy* menggunakan koefisien fungsi tujuan dan fungsi kendala berbentuk bilangan *fuzzy* trapesium. Model masalah transportasi *fuzzy* untuk masalah distribusi air PDAM Tirtamarta dirumuskan sebagai berikut.

Fungsi tujuan (Meminimalkan) dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\tilde{Z} = {} & (60,160,270,370)\tilde{x}_{11} \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{12} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{13} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{14} \\ & \oplus (75,175,210,310)\tilde{x}_{21} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{22} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{23} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{24} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{31} \\ & \oplus (90,190,205,305)\tilde{x}_{32} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{33} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{34} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{41} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{42} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{43} \\ & \oplus (65,165,230,330)\tilde{x}_{44} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{51} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{52} \\ & \oplus (70,170,225,325)\tilde{x}_{53} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{54} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{61} \\ & \oplus (80,180,210,310)\tilde{x}_{62} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{63} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{64} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{71} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{72} \\ & \oplus (85,185,205,305)\tilde{x}_{73} \\ & \oplus (M,M,M,M)\tilde{x}_{74}\end{aligned}$$

Fungsi kendala dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\tilde{x}_{11} \oplus \tilde{x}_{12} \oplus \tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{14} = (25000,75000,140000,190000)$$
$$\tilde{x}_{21} \oplus \tilde{x}_{22} \oplus \tilde{x}_{23} \oplus \tilde{x}_{24} = (115000,145000,180000,210000)$$
$$\tilde{x}_{31} \oplus \tilde{x}_{32} \oplus \tilde{x}_{33} \oplus \tilde{x}_{34} = (310000,340000,380000,410000)$$
$$\tilde{x}_{41} \oplus \tilde{x}_{42} \oplus \tilde{x}_{43} \oplus \tilde{x}_{44} = (60000,100000,150000,190000)$$
$$\tilde{x}_{51} \oplus \tilde{x}_{52} \oplus \tilde{x}_{53} \oplus \tilde{x}_{54} = (15000,30000,50000,65000)$$
$$\tilde{x}_{61} \oplus \tilde{x}_{62} \oplus \tilde{x}_{63} \oplus \tilde{x}_{64} = (40000,50000,60000,70000)$$
$$\tilde{x}_{71} \oplus \tilde{x}_{72} \oplus \tilde{x}_{73} \oplus \tilde{x}_{74} = (230000,290000,350000,410000)$$
$$\tilde{x}_{11} \oplus \tilde{x}_{21} \oplus \tilde{x}_{31} \oplus \tilde{x}_{41} \oplus \tilde{x}_{51} \oplus \tilde{x}_{61} \oplus \tilde{x}_{71} = (120000,170000,240000,290000)$$
$$\tilde{x}_{12} \oplus \tilde{x}_{22} \oplus \tilde{x}_{32} \oplus \tilde{x}_{42} \oplus \tilde{x}_{52} \oplus \tilde{x}_{62} \oplus \tilde{x}_{72} = (70000,270000,500000,700000)$$
$$\tilde{x}_{13} \oplus \tilde{x}_{23} \oplus \tilde{x}_{33} \oplus \tilde{x}_{43} \oplus \tilde{x}_{53} \oplus \tilde{x}_{63} \oplus \tilde{x}_{73} = (250000,310000,400000,460000)$$
$$\tilde{x}_{14} \oplus \tilde{x}_{24} \oplus \tilde{x}_{34} \oplus \tilde{x}_{44} \oplus \tilde{x}_{54} \oplus \tilde{x}_{64} \oplus \tilde{x}_{74} = (60000,100000,145000,185000)$$
$$\tilde{x}_{15} \oplus \tilde{x}_{25} \oplus \tilde{x}_{35} \oplus \tilde{x}_{45} \oplus \tilde{x}_{55} \oplus \tilde{x}_{65} \oplus \tilde{x}_{75} = (0,50000,155000,205000)$$

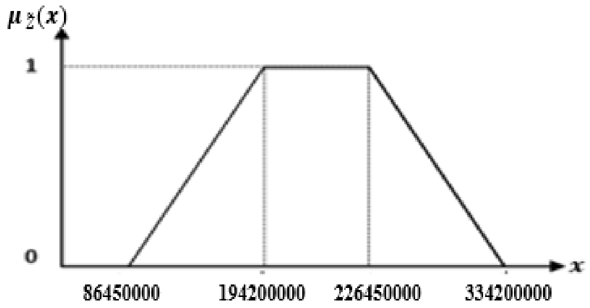
dengan $\tilde{x}_{ij} \geq 0$, untuk $i = 1, \ldots, 7$, dan $j = 1, \ldots, 5$.

Penyelesaian Model Masalah Transportasi Fuzzy

Model masalah transportasi *fuzzy* untuk masalah distribusi air PDAM Tirtamarta diselesaikan menggunakan metode pendekatan Monalisha dan metode *fuzzy stepping stone* sehingga diperoleh solusi penyelesaian untuk variabel keputusan yang optimal sebagai berikut.

1. $\tilde{x}_{11} = (0,20000,65000,85000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{11}) = 42.500$.
2. $\tilde{x}_{21} = (115000.145000.180000,210000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{21}) = 162.500$.
3. $\tilde{x}_{32} = (0,210000,450000,660000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{32}) = 330.000$.
4. $\tilde{x}_{44} = (60000,100000,145000,205000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{44}) = 122.500$.
5. $\tilde{x}_{53} = (0,20000,50000,70000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{53}) = 35.000$.
6. $\tilde{x}_{62} = (40000,50000,60000,70000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{62}) = 55.000$.
7. $\tilde{x}_{73} = (230000,290000,350000,410000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{73}) = 320.000$.
8. $\tilde{x}_{15} = (0,20000,110000,130000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{15}) = 65.000$.
9. $\tilde{x}_{35} = (0,20000,40000,60000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{35}) = 30.000$.
10. $\tilde{x}_{45} = (0,1000,4000,5000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{45}) = 2.500$.
11. $\tilde{x}_{55} = (0,2000,8000,10000)$, dengan $\Re(\tilde{x}_{55}) = 5000$.

Solusi penyelesaian variabel keputusan tersebut disubstitusikan ke fungsi tujuan, sehingga diperoleh $\tilde{Z} = (86450000,194200000,226450000,334200000)$, dengan $\Re(\tilde{Z}) = 209.825.000$. Grafik fungsi keanggotaannya ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik fungsi keanggotaan $\tilde{Z}$

Interpretasi Solusi Penyelesaian Optimal

Interpretasi dari solusi penyelesaian optimal adalah distribusi air dari reservoir Padasan ke Zona 1 sebesar $42.500\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Candi ke Zona 1 sebesar $162.500\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Gemawang ke Zona 2 sebesar $330.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Karanggayam ke Zona 4 sebesar $122.500\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Kotagede ke Zona 3 sebesar $35.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Pengok ke Zona 2 sebesar $55.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Bedog ke Zona 3 sebesar $320.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan. Selain itu, representasi tujuan *dummy* adalah terdapat sejumlah air yang tidak dialokasikan dalam setiap bulan, yaitu sisa persediaan reservoir Padasan $65.000\ m^3$, sisa persediaan reservoir Gemawang sebesar $30.000\ \mathrm{m}^3$, sisa persediaan reservoir Karanggayam sebesar $2.500\ \mathrm{m}^3$, dan sisa persediaan reservoir Kotagede sebesar $5.000\ \mathrm{m}^3$. Kemudian, interpretasi nilai fungsi tujuan yang diperoleh adalah total biaya distribusi air bersih Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirtamarta sebesar Rp. $209.825.000$,- per bulan.

Kesimpulan

Masalah transportasi *fuzzy* dapat diterapkan pada masalah distribusi air Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) Tirtamarta. Permasalahan pada PDAM Tirtamarta adalah menentukan solusi pendistribusian air yang optimal, sehingga biaya distribusi minimum. Penyelesaian masalah transportasi *fuzzy* pada distribusi air PDAM Tirtamarta terdapat beberapa tahapan, yaitu menentukan model transportasi *fuzzy* dari permasalahan distribusi air PDAM Tirtamarta, mengubah model transportasi *fuzzy* menjadi tabel transportasi *fuzzy*, menentukan penyelesaian menggunakan metode pendekatan Monalisha, dan menguji keoptimalan dari penyelesaian menggunakan metode *fuzzy stepping stone*.

Solusi optimal yang diperoleh untuk permasalahan PDAM Tirtamarta yaitu distribusi air dari reservoir Padasan ke Zona 1 sebesar $42.500\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Candi ke Zona 1 sebesar $162.500\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Gemawang ke Zona 2 sebesar $330.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Karanggayam ke Zona 4 sebesar $122.500\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Kotagede ke Zona 3 sebesar $35.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Pengok ke Zona 2 sebesar $55.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan, distribusi air dari reservoir Bedog ke Zona 3 sebesar $320.000\ \mathrm{m}^3$ per bulan. Solusi penyelesaian pada variabel keputusan disubstitusikan ke fungsi tujuan sehingga diperoleh $\tilde{Z} = (86450000{,}194200000{,}226450000{,}334200000)$, dengan $\Re(\tilde{Z}) = 209.825.000$. Jadi, diperoleh interpretasi nilai fungsi tujuan adalah total biaya distribusi air bersih PDAM Tirtamarta sebesar Rp. $209.825.000$,- per bulan.

Pada penelitian ini, penerapan penyelesaian masalah transportasi *fuzzy* pada studi kasus distribusi air PDAM Tirtamarta dapat dilakukan dengan efektif atau optimal. Oleh karena itu, diharapkan pada penelitian selanjutnya dilakukan studi kasus untuk bidang yang lain, menggunakan metode penyelesaian yang berbeda, atau teknik fungsi *ranking* yang lebih kompleks, sehingga lebih dapat mengetahui keefektifan dari penerapan masalah transportasi *fuzzy* dalam masalah kehidupan sehari-hari.

Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kami sampaikan kepada semua pihak yang telah membantu penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] Stapleton, D., Hanna, J. B., & Markussen, D. (2003). Marketing strategy optimization: Using Linear Programing to Establish an Optimal Marketing Mixture. *American Business Review*, *21*(2), 54-62.

[2] Mulyono, S. (2004). *Riset operasi (Edisi revisi).* Jakarta: Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

[3] Mohanaselvi, S., & Ganesan, K. (2012). Fuzzy optimal solution to fuzzy transportation problem: A new approach.

International Journal on Computer Science and Engineering, *3*(1), 367-375.

[4] Karyati, Wutsqa, D. U., & Insani, N. (2018). Yager's ranking method for sloving the trapezoidal fuzzy number linear programming. *Journal of Physics: Conferences Series*, *983*(2018), 1-7.

[5] Klir, G. J., & Yuan, B. (1997). *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*. United States of America: Prentice Hall.

[6] Pandian, P., & Natarajan, G. (2010). A new algorithm for finding a fuzzy optimal solution for fuzzy transportation problems. *Applied Mathematical Sciences, 4*(2), 79-90.

[7] Pattnaik, M. (2015). Transportation problem by Monalisha's approximation method for optimal solution. *Science Journal of Logistics, 11*(3), 267-273.

[8] Vimala, S., & Prabha, S. K. (2016). Fuzzy transportation problem through Monalisha’s approximation method. *British Journal of Mathematics and Computer Science, 17*(2), 1-11.

[9] Priya, S. R., & Sudha, A. S. (2019). Solving a fuzzy transportation problem by stepping stone method. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology, 7*(2), 1044-1048.

[10] Abbasbandy, S., & Hajjari, T. (2009). A New approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers. *Computers and Mathematics with Applications, 57*(3), 413-419.