J. Sains Dasar 2013 2(1) 25 – 31

# Sifat-sifat Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Maxplus

## (The Properties of Eigen Value and Eigen Vector of Matrices Over Maxplus Algebra)

**Musthofa[*] dan Nikenasih Binatari[♣]**

[*] *Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY / email: musthofa@uny.ac.id*
[♣] *Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY / email: nikenasih@yahoo.com*

### Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar maxplus. Langkah-langkah yang dilakukan adalah dengan mengkaji eksistensi nilai eigen dan vector eigen matriks atas aljabar maxplus. Selanjutnya diselidiki sifat-sifat nilai eigen dan vector eigen, meliputi ketunggalan dari nilai eigen, dan mengkaji tentang sifat nilai eigen dan vector eigen dari matriks transpose. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap matriks persegi atas aljabar maxplus selalu mempunyai nilai eigen. Suatu mariks persegi *A* atas aljabar mxplus akan mempunyai nilai eigen tunggal jika A irredusibel. Jika $\lambda$ merupakan nilai eigen *A*, maka $\lambda$ jug merupakan nilai eigen dari $A^T$. Tetapi sifat ini tidak berlaku untuk vektor eigennya.

Kata kunci: aljabar maxplus, nilai eigen, vektor eigen, matriks transpose

### Abstract

This research aimed to study the properties of eigenvalues and eigenvectors of the matrix over maxplus algebra. The initial step is to study the existence of eigenvalues and eigenvector of matrix over maxplus algebra. Moreover, the properties of eigenvalues and eigenvectors are investigated. Finally, we study the properties of eigenvalues and eigenvectors of the matrix transpose. The result shows that every square matrix over maxplus algebra always has eigenvalue. A square matrix A in the maxplus algebra will have a unique eigenvalue if *A* is irreducible. If $\lambda$ is an eigenvalue of *A*, then $\lambda$ is also an eigenvalue of $A^T$, but this property does not apply for the eigenvector.

Key words: maxplus algebra, eigenvalue, eigenvector, matrix transpose

## Pendahuluan

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, para peneliti dituntut untuk terus melakukan inovasi dan usaha yang terus berkesinambungan dalam menghadapi persaingan dan untuk mewujudkan kesejahteraan umat manusia. Kemajuan pesat dalam teknologi informasi tidak lepas dari perkembangan riset dalam bidang ilmu dasar. Oleh karena itu peneltian di bidang ilmu dasar tidak bisa ditinggalkan.

Aljabar maxplus merupakan salah satu bagian dari ilmu dasar dalam bidang matematika khususnya aljabar yang memiliki peranan sangat banyak dalam menyelesaikan persoalan di beberapa bidang seperti teori graf, kombinatorika (seperti dibahas dalam [2]), teori sistem (dibahas dalam [5] dan [7]), teori antrian (dibahas dalam [4]) dan proses stokastik(dibahas dalam [3]). Hal ini disebabkan aljabar max-plus mampu menguraikan suatu tipe tertentu dari sistem nonlinear dalam sudut pandang aljabar linear menjadi sistem linear dalam sudut pandang aljabar max-plus. Kelinieran ini akan memudahkan dalam penganalisaan sistem yang dikaji.

Berkaitan dengan masalah tersebut matriks dan nilai eigen merupakan salah satu alat matematis untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam bidang tersebut. Pembahasan tentang nilai eigen dan vektor eigen dalam dari suatu matriks relative terhadap suatu struktur aljabar merupakan bagian yang tidak bisa ditinggalkan. Oleh sebab itu, melalui penelitian diinginkan kajian yang mendalam tentang nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar max-plus yang memiliki aplikasi di berbagai bidang keilmuan.

Dalam aljabar linear dan aplikasinya, nilai eigen dan vektor eigen memiliki peranan penting salah satunya dalam menganalisis suatu sistem. Tidak adanya invers terhadap operasi pertama dalam aljabar max-plus, mengakibatkan kesulitan ketika akan menerapkan metode –metode yang sudah dikenal dalam aljabar linear seperti misalnya untuk menentukan solusi persamaan $Ax = b$. Beberapa peneliti di bidang aljabar max-plus, seperti dalam [1] dan [2] telah ditunjukkan eksistensi dan metode untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks atas aljabar max-plus.

Berberapa hal yang cukup menarik untuk diteliti antara lain metode menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks atas aljabar max-plus serta sifat-sifat nilai eigen dan vektor eigen seperti halnya pada aljabar linear yang sudah dikenal. Sejauh yang kami ketahui, belum diteliti masalah sifat – sifat nilai eigen dan vektor eigen pada aljabar max-plus, misalnya jika $\lambda$ merupakan nilai eigen $A$, apakah $\lambda$ juga merupakan nilai eigen dari $A^T$? Berdasarkan hasil-hasil tersebut, dalam penelitian ini akan diselidiki tentang sifat –sifat lebih lanjut dari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks atas aljabar max-plus.

## Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan model *research and development*. Peneliti mengkaji berbagai sumber tentang masalah nilai eigen dan vector eigen ada aljabar maxplus, membandingkan dengan kondisi yang terjadi pada ruang vektor dan kemudian melakukan pengembangan untuk diterapkan pada aljabar maxplus. Alat bantu yang digunakan dalam penelitian ini adalah perangkat lunak Scilab 5.3.

## Hasil dan Diskusi

### 1. Aljabar Maxplus

Aljabar maxplus adalah himpunan $R \cup \{-\infty\}$, dengan $R$ menyatakan himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan, yang dinotasikan dengan $\otimes$ . Selanjutnya $(R \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan $R_{\max}$ dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan $\varepsilon$. Elemen $\varepsilon$ merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$. Struktur aljabar dari $R_{\max}$ adalah semifield, yaitu :

1. $( R \cup \{-\infty\}, \oplus )$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$
2. $(R \cup \{-\infty\}, \otimes)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0
3. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif
4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$ , yaitu $\forall\, a \in R_{\max}$ , $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

### 2. Matriks atas $R_{\max}$

Dalam aljabar linear, jika $F$ field, maka dapat dibentuk suatu matriks berukuran $m \times n$ dengan entri –entrinya adalah elemen–elemen $F$. Hal yang serupa dapat dikerjakan pada $R_{\max}$, yaitu dapat dibentuk matriks $A$ berukuran $m \times n$ dengan entri-entrinya elemen $R_{\max}$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks atas aljabar maxplus didefinisikan sebagai berikut:

(1) $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$

(2) $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_k (A_{ik} \otimes B_{kj})$

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, maka

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \oplus -2 & 2 \oplus 7 \\ -2 \oplus 1 & 3 \oplus -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

dan

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \{1+(-2)\} \oplus \{2+1\} & \{1+7\} \oplus \{2+(-3)\} \\ \{-2+(-2)\} \oplus \{3+1\} & \{-2+7\} \oplus \{3+(-3)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Jika ( $R_{\max}$)$^{n \times n}$ menyatakan himpunan semua matriks dengan entri-entrinya elemen $R_{\max}$, , maka matriks $E$ dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = \varepsilon, \forall\ i, j$ berturut– turut merupakan matriks identitas dan matriks nol. Jadi ,

(1) ( $E \otimes A$ ) = ($A \otimes E$ ) = $A$ untuk setiap $A$ ∈ ( $R_{\max}$)$^{n \times n}$ ;
(2) ($\varepsilon \oplus A$ ) = ($A \oplus \varepsilon$ ) = $A$, untuk setiap $A$ ∈ ( $R_{\max}$)$^{n \times n}$.

Perlu diperhatikan bahwa ( $R_{\max}$)$^{n \times n}$ bukan merupakan semifield, tetapi merupakan semiring, sebab terhadap operasi ⊗ ($R_{\max}$)$^{n\times n}$ tidak komutatif dan tidak setiap $A \in (R_{\max})^{n \times n}$ mempunyai invers .

## 1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks atas Aljabar Max-plus

Konsep nilai nilai eigen dan vector eigen dalam aljabar maxplus tidak berbeda dengan konsep yang telah dikenal dalam aljabar linear. Namun untuk mencari nilai eigen dan vector eigen terdapat sedikit perbedaan. Metode untuk menentukan nilai eigen dan vector eigen suatu matriks persegi atas aljabar maxplus antara lain terdapat dalam Andy Rudhito ( 2003) dan Subiono (2010).

**Definisi 1( Rudhito, 2003)**. *Misalkan A matriks pesegi atas $R_{max}$ . Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks A jika terdapat suatu vektor **v** sehingga A ⊗ **v** = λ ⊗**v.** Selanjutnya vektor **v** tersebut disebut vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ.*

**Contoh 2 ( Subiono, 2010).**Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \text{maka } \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = 6 \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
.

2.
Terlihat bahwa nilai-karakteristik dari matriks $A$ adalah $\lambda = 6$ dan vektor karakteristiknya adalah

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya untuk menentukan nilai eigen tersebut, terlebih dahulu dibahas tentang graf, khususnya graf berarah.

**Definisi 3. ( Rudhito, 2003)** *Suatu graf berarah didefinisikan sebagai pasangan (V, A) dengan V adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut titik (vertices) dan A adalah suatu himpunan pasangan teurut titik-titik yang disebut dengan busur(arc).*

Berikut beberapa definisi penting yang berkaitan dengan graf :

**Definisi 4(Subiono, 2010)** Diberikan $G$ = ($V$, $A$).

(i) Suatu *lintasan* dalam $G$ adalah suatu barisan berhingga busur ($i_1$, $i_2$), ($i_2$, $i_3$), …, ($i_{l-1}$, $i_l$) dengan ($i_k$, $i_{k+1}$) ∈ $A$ .
(ii) Untuk suatu lintasan ρ, *panjang lintasan* ρ didefinisikan sebagai banyak busur yang menyusun ρ, dinotasikan dengan $|\rho|$
(iii) Suatu *sirkuit* adalah suatu lintasan dengan titik awal dan titik akhirnya sama.
(iv) *Sirkuit elementer* adalah suatu sirkuit yang mana setiap titik yang muncul tidak lebih dari sekali kecuali titik awal yang muncul tepat dua kali.

Selanjutnya berkaitan dengan matriks, selalu dapat dikaitkan dengan suatu graf berarah berbobot sebagai berikut :

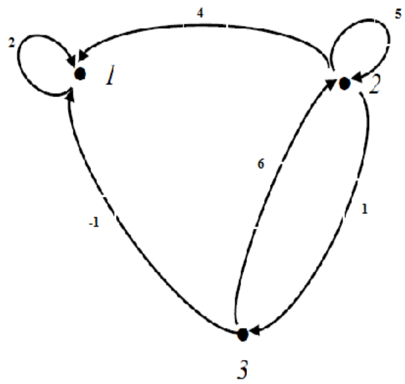
**Definisi 5(Subono, 2010))** *Jika A matriks persegi atas aljabar maxplus, maka Graf*

*Preseden dari A adalah graf berarah berbobot G(A) = (V, A) dengan V = {1, 2, ... , n} dan A = {(j, i) | w(i, j) = $A_{ij}$ }.*

**Contoh 6.**

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ \varepsilon & 5 & 6 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$

Graf preseden dari *A* adalah graf berarah berbobot *G*(*A*) = (*V*, *A*) dengan *V* = {*1, 2, 3*} dan *A* = {(*1, 1*), (*2, 1*), (*3, 1*), (*2, 2*), (*3, 2*), (*2, 3*)} yang disajikan dalam gambar berikut:




Gambar 1. Graf berarah berbobot *G*(*A*)

Dalam Rudhito(2003) telah dibahas bahwa untuk mencari bobot maksimum dari semua sirkuit dengan panjang *k* dengan titik *i* sebagai titik awal dan titik akhir dalam *G*(*A*) adalah dengan menghitung $(A^{\otimes k})_{ii}$. Sedangkan untuk mengitung bobot bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam *G*(*A*) (dinotasikan dengan $\lambda_{\max}(A)$) adalah dengan menghitung : $\lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1} \left( \frac{1}{k} \text{trace } A^{\otimes k} \right)$ dengan

$\text{trace } A^{\otimes k} = \bigoplus_{k} (A^{\otimes k})_{ii}$ .

Berkaitan dengan nilai eigen, berikut beberapa teorema yang dapat dijumpai dalam Bacelli(2001).

**Teorema 7. ( Bacelli, 2001)**

Diberikan *A* $\in R_{\max}^{n\times n}$. Jika semua sirkuit dalam G(A) mempunyai bobot non positif, maka

$$A^{\otimes p} \leq E \oplus A \oplus A^2 \oplus ... \oplus A^{\otimes n-1}, \forall p \geq n$$

Berdasarkan teorema diatas, didefinisikan matriks $A^*$ dan $A^+$ seperti di bawah ini :

**Definisi 8 ( Bacelli, 2001)**

*Diberikan A* $\in R_{\max}^{n\times n}$ *dengan semua sirkuit dalam G(A) mempunyai bobot nonpositif .*

*Didefinisikan dua matriks $A^*$ dan $A^+$ sebagai berikut :*

$A^* := E \oplus A \oplus ... \oplus A^{\otimes n} \oplus A^{\otimes n-1} \oplus ...$ *dan* $A^+ := A \otimes A^*$.

Selanjutnya, untuk mencari nilai eigen dari matriks *A* digunakan teorema berikut yang dapat dijumpai dalam Rudhito(2003) :

**Teorema 9. (Rudhito, 2003)** *Diberikan A matriks persegi atas aljabar maxplus. Jika skalar λ, merupakan nilai eigen A, maka λ merupakan bobot rata-rata suatu sirkuit dalam G(A).*

**Contoh 10.**

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

Diperoleh $A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 10 \\ 9 & 12 & 9 \\ 11 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ dan

$A^{\otimes 3} = \begin{bmatrix} 16 & 17 & 16 \\ 15 & 18 & 15 \\ 17 & 18 & 16 \end{bmatrix}$ Selanjutnya diperoleh trace *A* = max(5,6,3)=5; trace $A^{\otimes 2}$ = max(11,12,11) =12; trace $A^{\otimes 3}$ = max(16,18,16) = 18. Jadi, $\lambda_{\max}$(A) = $\max(\frac{1}{1}(6), \frac{1}{2}(12), \frac{1}{3}(18))$=max(6,6,6) = 6.

Selanjutnya dapat dilihat bahwa 6 merupakan nilai eigen dari *A*, sebab:

$$\begin{bmatrix} 5 & \varepsilon & 5 \\ \varepsilon & 6 & 3 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**1. Eksistensi Nilai Eigen**

Dalam aljabar linear, telah dibahas bahwa tidak setiap matriks persegi mempunyai nilai eigen. Namun, dalam aljabar maxplus, setiap matriks persegi dijamin mempunyai nilai eigen. Hal ini dibahas dalam teorema berikut yang mana pembuktiannya ada dalam Rudhito(2003)

**Teorema 11. (Rudhito, 2003)**

*Diberikan A* matriks persegi berukuran $n \times n$ atas aljabar maxplus. *Skalar* $\lambda_{\max}$ ($A$), *yaitu bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer* d*alam* $G(A)$, *merupakan suatu nilai eigen matriks A.*

**Contoh 12.**

1. Matriks $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 5 \end{bmatrix}$ mempunyai 2 nilai eigen, yaitu 0 dan 5, sebab $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$
2. Matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ nilai eigennya 4, yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Namun, vector eigen dari matrik tersebut tidaklah tunggal, sebab

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**2. Ketunggalan**

Berdasarkan contoh-contoh di atas, pada bagian ini akan dibahas tentang syarat suatu matriks atas aljabar maxplus mempunyai nilai eigen yang tunggal. Suatu matrik atas aljabar maxplus dinamakan matriks irredusibel jika $G(A)$ terhubung kuat. Berikut sifat matriks irredusibel yang telah dibahas dalam Bacelli ( 2001) dan Rudhito(2003).

**Teorema 13. (Rudhito, 2003)** *Jika matriks irredusibel A berukuran n x n atas aljabar maxplus mempunyai nilai eigen* $\lambda$ *dengan* $\boldsymbol{x}$ *vektor eigen aljabar max-plus yang bersesuaian dengan* $\lambda$*, maka* $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

**Bukti:**

Misalkan terdapat dengan tunggal $s \in \{1, 2, ..., n\}$ sehingga $x_s \neq \varepsilon$. Akibatnya $(A \otimes \boldsymbol{x})_s = \lambda \otimes x_s = \varepsilon$ atau $A_{s,i} \otimes x_i = \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Karena $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \neq s$, maka $A_{s,i} = \varepsilon$ . Hal ini berarti tidak ada busur dari setiap titik $i \neq s$ ke titik $s$. Akibatnya $G(A)$ tidak terhubung kuat atau *A* tidak irredusibel. Jika terdapat lebih dari satu komponen yang sama dengan $\varepsilon$ , bukti seperti di atas sehingga akan diperoleh kesimpulan *A* tidak *irredusibel*.

Matriks *irredusibel* mempunyai nilai eigen aljabar max-plus tunggal seperti diberikan dalam teorema berikut yang telah dibahas dalam Bacelli(2001) dan Rudhito(2003).

**Teorema 14.(Rudhito, 2003)**

*Jika A merupakan matriks atas aljabar maxplus yang irredusibel, maka A mempunyai nilai eigen tunggal.*

**Bukti:**.

Misalkan $\lambda$ adalah sebarang nilai eigen aljabar max-plus matriks *A* dengan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor eigen aljabar max-plus yang bersesuaian dengan $\lambda$. Karena *A* irredusibel maka $x_i \neq \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Diambil sebarang sirkuit $\gamma$, misalkan sirkuit $\gamma$ adalah $(i_1, i_2), (i_2, i_3)$ , ... , $(i_p, i_1)$ dalam $G(A)$.

Karena $\lambda$ adalah nilai eigen aljabar max-plus matriks *A*, maka

$$A_{i_2,i_1} \otimes x_{i_1} \le \lambda \otimes x_{i_2},$$
$$\vdots$$
$$A_{i_p,i_{p-1}} \otimes x_{i_{p-1}} \le \lambda \otimes x_{i_p},$$
$$A_{i_1,i_p} \otimes x_{i_p} \le \lambda \otimes x_{i_1}.$$

Didapat bahwa $\lambda$ lebih besar atau sama dengan rata-rata bobot $\gamma$ , untuk setiap sirkuit $\gamma$ dalam $G(A)$. Jadi $\lambda = \lambda_{max}(A)$, yang berarti nilai eigen aljabar max-plus matriks $A$ tunggal.

**1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Transpos**

Pada bagian ini akan dikaji nilai eigen dari matriks transpose.

**Teorema 15.** *Jika $\lambda$ merupakan nilai eigen matriks atas aljabar maxplus A, maka $\lambda$ juga merupakan nilai eigen dari matriks $B = A^T$*

**Bukti :**

Misal $\lambda_A$ merupakan nilai eigen matriks $A$ dan $\lambda_B$ merupakan nilai eigen dari $B = A^T$ . Karena $\left(A^{\otimes k}\right)_{jj} = \left(B^{\otimes k}\right)_{jj}$, maka trace $A^{\otimes k}$ = trace $B^{\otimes k}$. Akibatnya

$$\lambda_A = \lambda_{\max}(A) = \bigoplus_{k=1}\left(\frac{1}{k}\,\text{trace } A^{\otimes k}\right) =$$
$$\bigoplus_{k=1}\left(\frac{1}{k}\,\text{trace } B^{\otimes k}\right) = \lambda_{\max}(B) = \lambda_B .$$

**Contoh 16.**

Dalam contoh sebelumnya nilai eigen dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah 4 dan nilai eigen dari transposenya, yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ juga 4, sebab:

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Dari contoh ini dapat dilihat bahwa $A$ dan $A^T$ mempunyai nilai eigen yang sama. Dari contoh ini pula, dapat dilihat bahwa $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bukan merupakan vektor eigen dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Artinya walaupun $A$ dan $A^T$ mempunyai nilai eigen yang sama, tetapi vektor eigennya berlainan.

Kesimpulan mengungkapkan hal yang lebih tinggi atau luas dari diskusi. Hendaknya dalam bagian ini terkandung penarikan kesimpulan dan perampatan yang meluas, serta pencetusan teori, konsep, prinsip baru secara mapan daripada kesimpulan dangkal dan saran yang menyatakan penelitian perlu dilanjutkan.

**Kesimpulan**

1. Untuk menentukan nilai eigen suatu matriks atas aljabar maxplus $A$ dapat dilakukan dengan menghitung $\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,\text{trace}\,A^{\otimes k}$

2. Setiap matriks persegi atas aljabar maxplus selalu mempunyai nilai eigen.

3. Jika matriks $A$ irredusibel ( graf preseden dari $A$ *strongly connected*), maka $A$ mempunyai nilai eigen tunggal, tetapi vektor eigennya belum tentu tunggal

4. Nilai eigen dari matriks transpose $A$ sama dengan nilai eigen matriks $A$, tetapi vector eigennya belum tentu sama.

**Ucapan Terima Kasih**

Tim Peneliti mengucapkan terimakasih kepada Universitas Negeri Yogyakarta, khususnya Fakultas MIPA yang telah mendanai kegiatan penelitian ini.

**Pustaka**

[1] Bacelli, F.*et.al*. 2001. *Synchronization and Linearity.*New York: John Wiley & Sons

[2] Butkovic, p. 2002. *Max-algebra: the linear algebra of combinatoric. Science Direct, Journal of algebra and its application.*

[3] Flemming,W.H, 2004. Max-Plus Stochastic Processes. *Applied Mathemamatic Optimization*.New York : Springer-Verlag

[4] Heidergot, B. 2000. A Characterization of (max,+)-linear queueing system. *Queueing System*.2359(2000) 237-262.

[5] Menguy, E. 2000. A fist Step Towards Adaptive Control for Linear System in Max Algebra. *Discrete Event Dynamic System: Theory and Application*. Boston: KluwerAcademic Publisher.

[6] Rudhito, M. A. 2003. Sistem Persamaan Linear Maxplus Waktu Invarian. Tesis: UGM.

[7] Subiono. 2010. *Aljabar max-plus dan terapannya*. Artikel tidak diterbitkan.