J. Sains Dasar 2017 6 (2) 103 - 108

ANALISIS SISTEM ANTREAN DENGAN DISIPLIN PELAYANAN PREEMPTIVE

ANALYSIS OF QUEUE SYSTEM WITH PREEMPTIVE SERVICE DISCIPLINE

Nur Indra Istriani*, dan Nikenasih Binatari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

email : 12305141009@student.uny.ac.id

Abstrak

Disiplin pelayanan preemptive merupakan salah satu aturan dalam sistem antrean dimana server melayani customer berdasarkan urutan prioritasnya. Tujuan dari penulisan ini adalah menganalisis model sistem antrean dengan disiplin pelayanan preemptive, mendapatkan ukuran keefektifannya kemudian membandingkannya dengan disiplin pelayanan umum. Persamaan keseimbangan dalam penulisan ini diperoleh dengan mengasumsikan disiplin pelayanan Preemptive memiliki dua prioritas pelayanan dan proses antrian mengikuti *Quasi Birth and Date Process*. Selanjutnya, ukuran keefektifan diperoleh menggunakan metode *probability generating function* atas persamaan keseimbangan.
Kata kunci: antrean, keefektifan, PGF, preemptive

Abstract

Preemptive service discipline is one of rules in the queue system where the server serves customers based on the order of priority. The purpose of this paper is to analyze the queueing model using Preemptive service discipline, to obtain its effective measurements and to compare it towards the general service discipline. The balance equation in this paper are obtained by assuming that Preemptive service discipline has two services priority and the queueing process follows Quasi Birth and Date Process. Next, using probability generating function (PGF) method, we obtain the measurement of effectiveness.

Keywords: effectiveness, PGF, preemptive, queue

Pendahuluan

Bagi sebagian orang mengantre merupakan kegiatan yang sangat membosankan, tidak efisien dan dianggap membuang-buang waktu. Mengantre sendiri terjadi karena terdapat banyak *customer* yang ingin dilayani sedangkan jumlah *server* sangat terbatas. Salah satu komponen penting dalam sistem antrean adalah disiplin pelayanan yang merupakan urutan *customer* untuk memperoleh layanan. Disiplin pelayanan yang sering diterapkan dalam kehidupan sehari-hari antara lain *First Come First Served (FCFS)*, *Last Come First Served (LCFS)*, *Service in Random Order (SIRO)* atau *Random Selection For Service (RSS)*, *Priority Service (PS).*

Dalam beberapa kasus seperti di Rumah Sakit disiplin antrean yang diterapkan adalah *Priority Service*, hal ini dikarenakan alasan kebutuhan pasien, yaitu pasien yang keadaannya lebih kritis akan dilayani terlebih dahulu tanpa mempertimbangkan pasien yang datang lebih awal. *Priority Service (PS)* atau prioritas pelayanan terdapat dua aturan yang dapat diikuti, [7], yaitu :

1. Aturan *Preemptive*
Disiplin pelayanan *Preemptive* menggambarkan situasi dimana *server* sedang melayani *customer*, kemudian beralih melayani *customer* yang diprioritaskan meskipun belum selesai melayani *customer* sebelumnya.
2. Aturan *Non-Preemptive*
Disiplin pelayanan *Non-Preemptive* menggambarkan situasi dimana *server* akan menyelesaikan pelayanannya baru kemudian beralih melayani *customer* yang diprioritaskan.

Beberapa penelitian telah dibahas mengenai disiplin antrean prioritas pelayanan, Durratun Ni'amah dan Sugito [1] mengkaji tentang analisis formula prioritas pelayanan *Non-Preemptive*. Selanjutnya untuk aplikasi dari formula ukuran keefektifan sistem antrean *Non-Preemptive* dibahas oleh Kailash C. Madan, [2]. Di lain pihak untuk disiplin pelayanan *Preemptive*, Tommy Yoga Aditama, Laksmi Prita Wardhani [3] membahas tentang aplikasi dari prioritas pelayanan *Preemptive*. Kemudian lebih lanjut oleh S. S. Mishra and D. K. Yadav [4] membahas tentang biaya dan keuntungan dalam penerapan sistem antrean dengan disiplin pelayanan *Preemptive*.

Mengingat banyaknya pelayanan pada sistem antrian yang menggunakan disiplin prioritas preemptive, maka pada artikel ini, akan dibahas penurunan formula probabilitas *n customer* dalam sistem dan ukuran-ukuran keefektifannya. Ukuran keefektifan yang dimaksud meliputi nilai harapan banyak *customer* dalam sistem, nilai harapan banyak *customer* dalam antrean, nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem, dan nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam antrean.

Penelusuran rumus dimulai dengan menganalisis sistem antrean dengan disiplin pelayanan *Preemptive*. Tujuan pembahasan artikel ini menjelaskan penjabaran formula ukuran keefektifan sistem antrean dengan disiplin pelayanan *preemptive*.

Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk jenis penelitian studi literatur dengan mencari referensi teoritis baik dari buku maupun artikel yang terkait dengan disiplin pelayanan preemptive pada sistem antrian. Menurut Miller [5], Persamaan keseimbangan untuk disiplin pelayanan prioritas pertama diturunkan oleh A. Cobham sementara analisa untuk prioritas preemptive pertama kali hasilnya dipublikasikan oleh H. White dan L. S. Christie. Hasil dari penelitian telah digunakan pada kasus transfer data [6].

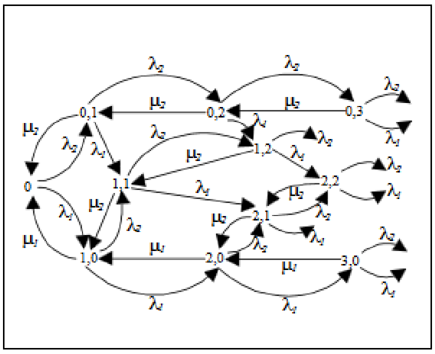
Hasil dan Diskusi

Pada bagian ini akan dibahas tentang penurunan formula untuk ukuran keefektifan sistem. Model yang dibentuk dinyatakan dalam persamaan keseimbangan dengan mengikuti *Quasi Birth-Death Process* untuk dua level prioritas kemudian metode *Probability Generating Function (PGF)* digunakan untuk mendapatkan formulanya. Diasumsikan hanya satu *server* yang tersedia dan akan melayani *customer* dengan prioritas lebih tinggi terlebih dahulu. Selanjutnya, dimisalkan pula bahwa kedatangan dan pelayanan untuk kedua prioritas terdistribusi Poisson.

A. *Quasi Birth-Death Process*

Dinotasikan pada sistem antrian prioritas 1, laju kedatangan λ_1 dan laju pelayanan μ_1 sementara dalam sistem antrian prioritas 2, laju kedatangan λ_2 dan laju pelayanan μ_2. Di asumsikan kedatangan pertama atau prioritas kelas yang lebih tinggi memiliki laju kedatangan λ_1, kedatangan kedua atau kelas yang lebih rendah memiliki laju kedatangan λ_2, maka total tingkat kedatangan adalah $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ dengan faktor *utility* sistem atau peluang *server* sibuk adalah $\rho = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

Didefinisikan state space S sebagai himpunan pasangan berurutan, $S = \{(n,m)\}$, dan dimisalkan pula p_{nm} adalah probabilitas *steady state* terdapat n customer prioritas pertama dan m customer prioritas kedua.



Gambar 1. Proses kedatangan dan kepergian sistem antrean dengan disiplin pelayanan *Preemptive*

Dari Gambar 1 maka dapat dituliskan beberapa kemungkinan kejadian dari model antrean dengan disiplin prioritas *Preemptive* sebagai berikut

Kasus 1.

Pada state (0,0), peluang tidak ada customer prioritas 1 maupun 2 = peluang tidak ada kedatangan + peluang 1 customer prioritas 1 dilayani + peluang 1 customer prioritas 2 dilayani.

$$p_{0,0} = (1-\lambda)\, p_{0,0} + \mu_1 p_{1,0} + \mu_2 p_{0,1} \qquad 1)$$

Kasus 2.

Pada state (n,0), peluang terdapat n customer prioritas 1 dan tidak ada customer prioritas 2 = peluang dari n customer prioritas 1 terdapat 1 customer datang dan 1 customer prioritas 1 dilayani + peluang dari n-1 customer prioritas 1 ada kedatangan 1 customer + peluang dari n + 1 customer prioritas 1 ada pelayanan customer.

$$p_{n,0} = \left(1-(\lambda+\mu_1)\right) p_{n,0} + \lambda_1 p_{n-1,0} + \mu_1 p_{n+1,0} \qquad 2)$$

Kasus 3.

Pada state (0,m), ekuivalen dengan kasus 2 namun pada kasus disiplin pelayanan prioritas terdapat penambahan peluang terjadi 1 pelayanan customer prioritas 1 dari m customer prioritas 2.

$$p_{0,m} = \left(1-(\lambda+\mu_2)\right) p_{0,m} + \mu_1 p_{1,m} + \lambda_2 p_{0,m-1} + \mu_2 p_{0,m+1} \quad 3)$$

Kasus 4.
Pada state (n,m).

$$p_{n,m} = \left(1-(\lambda+\mu_1)\right) p_{n,m} + \lambda_1 p_{n-1,m} + \lambda_2 p_{n,m-1} + \mu_1 p_{n+1,m} \quad 4)$$

Dari kasus 1 – 4 dapat dilihat bahwa matriks generator, $Q = \left[p_{nm}\right]$, merupakan blok tridiagonal, maka menurut [8], sistem antrian ini disebut dengan quasi birth and death process.

1. Probabilitas prioritas pertama

Didefinisikan *probability generating function (PGF)*

$$P(z) = E\left[z^N\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,m} z^n, |z| \le 1 \quad 5)$$

$$(\lambda+\mu_1)\, p_{n,0} = \lambda_1 p_{n-1,0} + \mu_1 p_{n+1,0} \quad 6)$$

Untuk n = 0, berlaku

$$\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) p_{0,0} = p_{1,0} \quad 7)$$

Penyelesaian Persamaan (6) dengan mencari *PGF* dari N adalah sebagai berikut :
Pertama mengalikan persamaan (6) dengan z^n , untuk $n \ge 1$ maka

$$\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) p_{n,0} z^n - \rho_1 z p_{n-1,0} z^{n-1} = z^{-1} p_{n+1,0} z^{n+1} \quad 8)$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (5) maka persamaan (8) diperoleh

$$\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,0} z^n - \rho_1 z \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1,0} z^{n-1} = z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1,0} z^{n+1} \quad 9)$$

Kemudian persamaan (9) juga dapat dinyatakan sebagai

$$\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) \left[P(z) - p_{0,0}\right] - \rho_1 z P(z) = z^{-1}\left[P(z) - p_{1,0} z - p_{0,0}\right] \quad 10)$$

Untuk memperoleh nilai $P(z)$ maka persamaan (3.7) disubtitusi ke persamaan (3.10), didapatkan

$$P(z) = \frac{p_{0,0}}{\left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) z + \rho_1 z^2 + 1\right]} \quad 11)$$

Selanjutnya akan dicari nilai $p_{0,0}$ dengan mensubtitusi $z = 1$ ke Persamaan (11) diperoleh

$$p_{0,0} = \left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) + \rho_1 + 1\right] \quad 12)$$

Kemudian persamaan (12) disubtitusi ke Persamaan (11) maka diperoleh

$$P(z) = \frac{\left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) + \rho_1 + 1\right]}{\left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) z + \rho_1 z^2 + 1\right]} \quad 13)$$

Selanjutnya akan dicari turunan pertama dari persamaan (13) terhadap z untuk memperoleh nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrean untuk prioritas pertama.
Mencari turunan parsial dari persamaan (13) dengan memisalkan

$$U = \left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) + \rho_1 + 1\right]$$

$$U' = 0$$

$$V = \left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) z + \rho_1 z^2 + 1\right]$$

$$V' = -\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) + 2\rho_1 z$$

$$\frac{dP(z)}{dz} = \frac{d\left\{\dfrac{\left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) + \rho_1 + 1\right]}{\left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) z + \rho_1 z^2 + 1\right]}\right\}}{dz}$$

$$= \frac{0 - \left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) + \rho_1 + 1\right]\left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) + 2\rho_1 z\right]}{\left[-\left(\frac{\lambda}{\mu_1}+1\right) z + \rho_1 z^2 + 1\right]^2}$$

dengan mensubtitusikan $z = 1$, diperoleh

$$P'(1)=\frac{\lambda+\mu_1-2\rho_1\mu_1}{\rho_1\mu_1-\lambda} \quad 14)$$

2. Probabilitas prioritas kedua
   Didefinisikan *probability generating function (PGF)*

$$P(x)=E\left[x^M\right]=\sum_{m=0}^{\infty}P_{n,m}x^m, |x|\le 1 \quad 15)$$

Penyelesaian Persamaan (3) dengan mencari *PGF* dari M adalah sebagai berikut :

Pertama mengalikan persamaan (3) dengan x^m , untuk $m\ge 1$ maka

$$(\lambda+\mu_2)\,p_{0,m}x^m=\mu_1 p_{1,m}x^m+\lambda_2 p_{0,m-1}x^m+\mu_2 p_{0,m+1}x^m \quad 16)$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (15) maka persamaan (16) diperoleh

$$(\lambda+\mu_2)\sum_{m=1}^{\infty}p_{0,m}x^m=\mu_1\sum_{m=1}^{\infty}p_{1,m}x^m+\lambda_2\sum_{m=1}^{\infty}p_{0,m-1}x^m$$
$$+\mu_2\sum_{m=1}^{\infty}p_{0,m+1}x^m$$

Kemudian persamaan (16) juga dapat dinyatakan sebagai

$$-\left(\lambda+\mu_2-\frac{\mu_2}{x}\right)p_{0,0}+\mu_1 p_{1,0}+\mu_2 p_{0,1}$$
$$=\mu_1 P_1(x)-\left(\lambda+\mu_2-\lambda_2 x-\frac{\mu_2}{x}\right)P_0(x)$$

Karena $\lambda p_{0,0}=\mu_1 p_{1,0}+\mu_2 p_{0,1}$, akibatnya

$$p_{0,0}\mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)=\mu_1 P_1(x)-\left(\lambda+\mu_2-\lambda_2 x-\frac{\mu_2}{x}\right)P_0(x)$$

Diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\frac{p_{0,0}\mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)+\left(\lambda+\mu_2-\lambda_2 x-\frac{\mu_2}{x}\right)P_0(x)}{\mu_1}=P_1(x) \quad 17)$$

Selanjutnya dengan mengalikan persamaan (4) dengan x^m, untuk $m\ge 1$ maka

$$(\lambda+\mu_1)\,p_{n,m}x^m=\lambda_1 p_{n-1,m}x^m+\lambda_2 p_{n,m-1}x^m$$
$$+\mu_1 p_{n+1,m}x^m \quad 18)$$

Berdasarkan persamaan (5) maka persamaan (18) diperoleh

$$(\lambda+\mu_1)\sum_{m=1}^{\infty}p_{n,m}x^m=\lambda_1\sum_{m=1}^{\infty}p_{n-1,m}x^m+\lambda_2\sum_{m=1}^{\infty}p_{n,m-1}x^m$$
$$+\mu_1\sum_{m=1}^{\infty}p_{n+1,m}x^m \quad 19)$$

Kemudian persamaan (19) juga dapat dinyatakan sebagai

$$-(\lambda+\mu_1)p_{n,0}+\lambda_1 p_{n-1,0}+\mu_1 p_{n+1,0}$$
$$=\mu_1 P_{n+1}(x)-(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x)P_n(x)$$
$$+\lambda_1 P_{n-1}(x)$$

Karena $(\lambda+\mu_1)p_{n,0}=\lambda_1 p_{n-1,0}+\mu_1 p_{n+1,0}$, akibatnya

$$-(\lambda+\mu_1)p_{n,0}+(\lambda+\mu_1)p_{n,0}$$
$$=\mu_1 P_{n+1}(x)-(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x)P_n(x)$$
$$+\lambda_1 P_{n-1}(x)$$

Diperoleh persamaan sebagai berikut

$$0=\mu_1 P_{n+1}(x)-(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x)P_n(x)+\lambda_1 P_{n-1}(x) \quad 20)$$

Selanjutnya akan dicari nilai P_0 dengan mensubtitusi $n=0$ ke Persamaan (20) diperoleh

$$0=\mu_1 P_1(x)-(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x)P_0(x) \quad 21)$$

Kemudian persamaan (17) disubtitusi ke Persamaan (21) maka didapatkan

$$(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x)P_0(x)-\left(\lambda+\mu_2-\lambda_2 x-\frac{\mu_2}{x}\right)P_0(x)$$
$$=p_{0,0}\mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)$$

Diperoleh nilai untuk $P_0(x)$ adalah

$$P_0(x)=\frac{p_{0,0}\mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\left(\mu_1-\mu_2+\frac{\mu_2}{x}\right)} \quad 22)$$

Langkah selanjutnya mengalikan persamaan (20) kalikan dengan z^n, diperoleh

$$P(z,x)=\frac{\mu_1 P_1(x)-\left(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x-\frac{\mu_1}{z}\right)P_0(x)}{\left(\frac{\mu_1}{z}-(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x)+\lambda_1 z\right)} \quad 23)$$

Kemudian persamaan (17) dan persamaan (22) disubtitusi ke Persamaan (23) maka didapatkan

$$P(z,x) = \frac{p_{0,0}\mu_2\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{\frac{\mu_1}{z}}{\mu_1-\mu_2+\frac{\mu_2}{x}}\right)}{\left(\frac{\mu_1}{z}-(\lambda+\mu_1-\lambda_2 x)+\lambda_1 z\right)}$$

Jika $\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$, dan $p_{0,0} = 1-\rho_1-\rho_2$, maka

$$P(z,x) = \frac{(1-\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\mu}{z}-\mu\frac{x}{z}\right)}{\left(\frac{\mu}{z}-(\lambda+\mu-\lambda_2 x)+\lambda_1 z\right)} \quad 24)$$

Selanjutnya akan dicari turunan pertama dari persamaan (24) terhadap z untuk memperoleh nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrean untuk prioritas kedua

Akan dicari turunan parsial dari persamaan (24) dengan memisalkan

$$U = (1-\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\mu}{z}\right)$$
$$-(1-\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\mu}{z}x\right)$$
$$U' = -(1-\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\mu}{z}\right)$$
$$V = \left(\frac{\mu}{z}-(\lambda+\mu-\lambda_2 x)+\lambda_1 z\right)$$
$$V' = \lambda_2$$

Maka turunan pertama dari $P(z,x)$ yaitu

$$P'(z,x) = \frac{-(1-\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\mu}{z}\right)}{\left(\frac{\mu}{z}-(\lambda+\mu-\lambda_2 x)+\lambda_1 z\right)^2}$$
$$\frac{\left[\left(\frac{\mu}{z}-(\lambda+\mu-\lambda_2 x)+\lambda_1 z\right)+\lambda_2-\lambda_2 x\right]}{\left(\frac{\mu}{z}-(\lambda+\mu-\lambda_2 x)+\lambda_1 z\right)^2}$$

Untuk $x = 1$ dan $z = 1$, diperoleh

$$P'(1) = \frac{-(1-\rho_1-\rho_2)(\mu)}{(-\lambda+\lambda_2+\lambda_1)}$$

Ketika $\lambda_1 = 0$, diperoleh persamaan

$$P'(1) = \frac{(1-\rho_1-\rho_2)(\mu)}{(\lambda-\lambda_2)} \quad 25)$$

B. Ukuran Keefektifan Model Antrean (M/M/1/PRD)

Ukuran keefektifan sistem antrean dengan disiplin pelayanan *preemptive* dengan masing-masing prioritas adalah sebagai berikut:

1. Antrean untuk prioritas pertama

Nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem untuk prioritas pertama, diperoleh dari persamaan (14) sebagai berikut

$$L_s = L_{q1} + \rho_1$$

$$L_s = \frac{(1-\rho_1)^2}{\rho_1} \quad 26)$$

Menggunakan formula *Little Law*, dapat ditentukan nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem (W_s) sebagai berikut

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \quad 27)$$

Persamaan (26) disubstitusi ke Persamaan (27), sehingga diperoleh

$$W_s = \frac{\frac{(1-\rho_1)^2}{\rho_1}}{\lambda} \quad 28)$$

Waktu tunggu *customer* dalam antrean (W_q) adalah selisih antara waktu tunggu *customer* dalam sistem dan waktu pelayanan.

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \quad 29)$$

dengan menubstitusi persamaan (28) ke persamaan (29), maka diperoleh

$$W_q = \frac{\frac{(1-\rho_1)^2}{\rho_1}}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \quad 30)$$

Nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrean (L_q) adalah perkalian antara tingkat kedatangan *customer* dan waktu tunggu *customer* dalam antrean.

$$L_q = \lambda W_q$$

Sehingga dengan mensubstitusikan Persamaan (30) diperoleh

$$L_q = \lambda \left(\frac{\frac{(1-\rho_1)^2}{\rho_1}}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \right) \quad 31)$$

2. Untuk antrean dengan prioritas kedua

Nilai harapan banyaknya *customer* dalam sistem untuk prioritas kedua, diperoleh dari persamaan (25)

$$L_s = L_{q2} + \rho_1$$

$$L_s = \frac{(1-\rho_1-\rho_2)(\mu)}{(\lambda-\lambda_2)} + \rho_2 \quad 32)$$

Nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam sistem (W_s) diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (32) ke Persamaan (27), sehingga diperoleh

$$W_s = \frac{\frac{(1-\rho_1-\rho_2)(\mu)}{(\lambda-\lambda_2)} + \rho_2}{\lambda} \quad 33)$$

Nilai harapan waktu tunggu *customer* dalam antrean (W_q) diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (33) ke persamaan (29), sehingga diperoleh

$$W_q = \frac{\frac{(1-\rho_1-\rho_2)(\mu)}{(\lambda-\lambda_2)} + \rho_2}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \quad 34)$$

Nilai harapan banyaknya *customer* dalam antrean (L_q) diperoleh dengan mensubtitusikan persamaan (34) ke persamaan $L_q = \lambda W_q$, maka

$$L_q = \lambda \left(\frac{\frac{(1-\rho_1-\rho_2)(\mu)}{(\lambda-\lambda_2)} + \rho_2}{\lambda} - \frac{1}{\mu} \right) \quad 35)$$

Simpulan

Ukuran keefektifan dari sistem antrean dengan disiplin pelayanan *preemptive* dalam penulisan ini diperoleh melalui penentuan *PGF* banyak *customer* dalam sistem dan dengan menggunakan formula *Little Law*.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu kelancaran penelitian ini.

Pustaka

[1] Durratun, N, & Sugito. (2011). *Sistem Antrean Dengan Prioritas Pelayanan. Prosiding, Seminar Nasional Statistika*. Semarang: Universitas Diponegoro.

[2] Kailash, C. (2011). *A Non-Preemptive Priority Queueing System with a Single Server Serving Two Queues M/G/1 and M/D/1 with Optional Server Vacations Based on Exhaustive Service of the Priority Units. Academic Journal, 26* (1), 14-17

[3] Tommy ,Y.A, Laksmi dan Prita. (2013). *Distribusi Waktu Tunggu Pada Disiplin Pelayanan Prioritas (Studi Kasus: Instalasi Rawat Darurat Di RSUD Dr. Soetomo Surabaya). Jurnal Sains dan Seni Pomits, 1* (1), 1-6

[4] S.S. Mishra., D.K. Yadav. (2009), Cost and Profit Analysis of Markovian Queueing System with Two Priority Classes: A Computational Approach. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering* Vol:3, No:9.

[5] Miller, R. (1960). Priority Queues. *The Annals of Mathematical Statistics, 31*(1), 86-103. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/2237496

[6] Ilyashenko A., Zayats O., Muliukha V., Laboshin L. (2014) Further Investigations of the Priority Queuing System with Preemptive Priority and Randomized Push-Out Mechanism. In: Balandin S., Andreev S., Koucheryavy Y. (eds) *Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems*. NEW2AN 2014. Lecture Notes in Computer Science, vol 8638. Springer, Cham

[7] Gross, D, & Harris, C. M. (1998). *Fundamental of Queuing Theory 3rd*. New York: John Wiley & Sons.

[8] Gunter, dkk. (2006). *Queueing Networks and Markov Chains*. Canada: John Wiley & Sons.