J. Sains Dasar 2016 5(1) 28 - 39

RING *FUZZY* DAN SIFAT-SIFATNYA

FUZZY RING AND ITS PROPERTIES

Rifki Chandra Utama * dan Karyati

Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta

*email: rifkichandrautama23@gmail.com

Diterima 4 Desember 2015 disetujui 7 Maret 2016

Abstrak

Struktur aljabar yang melibatkan satu operasi biner salah satunya adalah grup yang didefinisikan suatu himpunan (klasik) tak kosong dengan satu operasi biner bersifat asosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai invers. Di dalam struktur grup dikenal istilah subgrup, subgrup normal, subgrup faktor dan homomorfisme grup serta sifat-sifatnya. Setelah diperkenalkannya himpunan fuzzy oleh L. A. Zadeh 1965, struktur aljabar klasik dikembangkan oleh peneliti ke struktur aljabar *fuzzy* sebagai contoh semigrup *fuzzy* dan grup *fuzzy*. Diinsipirasi dari tulisan mengenai semigrup *fuzzy* dan grup *fuzzy* tersebut dilakukan penelitian pada struktur aljabar ring dengan mengkaji ring *fuzzy*, ideal ring *fuzzy*, homomorfizme ring *fuzzy* dan ring hasil bagi *fuzzy* beserta sifat-sifatnya. Hasil dari kajian ini adalah diperoleh sifat dari ring *fuzzy*, sifat ideal ring *fuzzy*, sifat homomorfisme ring *fuzzy* dan sifat ring hasil bagi *fuzzy* dengan memanfaatkan subhimpunan level μ_t dan subhimpunan level kuat $\mu_t^{>}$ serta peta dan pra-peta homomorfime ring *fuzzy*.

Kata kunci: ring *fuzzy*, subhimpunan level, subhimpunan level kuat, ideal ring *fuzzy*, homomorfisme ring *fuzzy*, ring hasil bagi *fuzzy*

Abstract

Algebraic structure that involves a binary operation one of which is a group that defines a set of (classical) is not empty with a binary operation is associative, have identity elements and each element has an inverse. In the structure of the group known as the term subgroup, normal subgroup, subgroup and factor group homomorphism and its properties. After the introduction of fuzzy sets by L. A. Zadeh at 1965, classical algebraic structures developed by the researchers to algebraic structure as an example semigroup fuzzy and fuzzy group. Inspired of writings on semigroup fuzzy and fuzzy group that conducted research on the algebraic structure of the ring with ring reviewing fuzzy, fuzzy ideal ring, ring homomorphism fuzzy and fuzzy quotient ring along with its properties. The results of this study are obtained fuzzy nature of the ring, ring ideal properties fuzzy, fuzzy ring homomorphism nature and properties of fuzzy quotient ring by utilizing a subset of a subset level μ_t *and strong levels* $\mu_t^{>}$ *as well as maps and pre-image homomorphism fuzzy ring.*

Keyword: fuzzy ring, subset level, strong subset level, fuzzy ideal ring, homomorphism fuzzy ring, fuzzy quotient ring

Pendahuluan

Ring merupakan himpunan klasik yang melibatkan dua operasi biner. ring didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi aksioma-aksioma, yaitu: (i) terhadap operasi biner pertama merupakan grup abelian, (ii) terhadap operasi biner kedua merupakan semigrup dan (iii) terhadap kedua operasi biner tersebut berlaku hukum distributif [1]. Sebagai contoh himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan riil, dan himpunan bilangan komplek merupakan ring dengan penjumlahan dan perkalian biasa. Terkait dengan struktur ring, telah dikenal subring, ideal ring, ring faktor dan homomorfisme ring.

Pada perkembangannya, himpunan klasik yang menjadi dasar pengembangan struktur aljabar klasik tersebut dikembangkan ke dalam konsep himpunan *fuzzy* yang diperkenalkan oleh L. A. Zadeh pada tahun 1965. Himpunan *fuzzy* μ adalah pemetaan dari himpunan klasik A ke interval [0,1], yaitu μ: $A \to$ [0,1] [2]. Setelah diperkenalkannya konsep himpunan *fuzzy* tersebut, peneliti mengembangkan struktur aljabar klasik ke struktur aljabar *fuzzy*, misalnya: grup *fuzzy* dan semigrup *fuzzy*.

Analog dengan generalisasi dari grup klasik ke grup *fuzzy* dan semigrup klasik ke semigrup *fuzzy*, struktur ring juga dapat didefinisikan berdasarkan himpunan *fuzzy*. Hal ini mengingat bahwa grup, semigrup dan ring merupakan struktur aljabar dengan operasi biner. Hanya saja ring memuat dua operasi biner sedangkan grup hanya satu operasi biner.

Beberapa penelitian mengenai struktur aljabar klasik menjadi struktur aljabar *fuzzy* yakni dilakukan oleh Ajmal [2] mengenai grup *fuzzy* dan Karyati [3] mengenai semigrup *fuzzy*. Di dalam penelitian Ajmal [3], diperoleh beberapa sifat mengenai grup *fuzzy* yang berkaitan dengan grup klasik. Sifat-sifat tersebut dikembangkan oleh Karyati [3] pada semigrup dengan menggunakan sifat subhimpunan level dan subhimpunan level kuat serta peta dan pra-peta homomorfisme dari semigrup.

Metode Penelitian

Dalam pembahasan penelitian ini diperlukan banyak definisi maupun istilah yang digunakan dalam pembuktian.

A. Himpunan *Fuzzy*

Misalkan terdapat suatu himpunan tak kosong X, μ disebut sebagai himpunan *fuzzy* dari X didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1. [4] *Himpunan fuzzy μ dari himpunan X adalah pemetaan anggota-anggota X ke interval riil $[0,1]$ dan dinotasikan sebagai berikut.*

$$\mu : X \to [0,1].$$

Untuk lebih jelas mengenai definisi di atas, diberikan contoh himpunan *fuzzy* berikut:

Contoh 2.1. *Misalkan $X = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, dengan $\mu = \frac{x+1}{10}$ merupakan himpunan fuzzy yang memetakaan anggota X ke interval $[0,1]$. Dengan demikian diperoleh himpunan fuzzy dari X yang direpresentasikan dengan pasangan berurutan berikut:*

$$\mu(X) = \left\{\left(0, \frac{1}{10}\right), \left(2, \frac{3}{10}\right), \left(4, \frac{5}{10}\right), \left(6, \frac{7}{10}\right), \left(8, \frac{9}{10}\right)\right\}.$$

B. Ring

Struktur aljabar klasik dengan dua operasi biner salah satunya adalah ring. Ring didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.2. [2] *Suatu himpunan R tak kosong dengan dua operasi biner (penjumlahan + dan perkalian ×), sedemikian sehingga untuk setiap a, b, c dalam R berlaku:*

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. *Terdapat identitas penjumlahan yang disebut 0. Sehingga memenuhi* $a + 0 = 0 + a = a$ *untuk setiap* a *dalam* R.
4. *Terdapat elemen* $-a$ *dalam* R *sedemikian sehingga* $a + (-a) = 0$.
5. $a(bc) = (ab)c$.
6. $a(b + c) = ab + ac$ *dan* $(b + c)a = ba + ca$.

Pada struktur ring, juga dikenal subring, ideal ring dan ring faktor. Subring merupakan himpunan bagian yang memiliki sifat sama dengan ring tersebut, didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3. [2] *Sebuah subhimpunan S dari suatu ring R adalah subring dari R*

jika S itu sendiri merupkan ring dengan operasi pada R.

Untuk menjamin suatu subhimpunan dari suatu ring merupakan subring, diperlukan syarat cukup dan syarat perlu. Berikut ini teorema subring dengan mempertimbangkan syarat cukup dan syarat perlu suatu subring yang juga akan dipakai untuk membangun definisi dari ring fuzzy.

Teorema 2.1. [2] *Subhimpunan tak kosong S dari ring R adalah subring jika tertutup atas pengurangan dan perkalian, yakni jika $(a-b)$ dan (ab) dalam S bilamana a dan b di dalam S.*

Ideal ring merupakan subring dengan sifat khusus yang didefinisikan berikut:

Definisi 2.4. [3] *Suatu subring A dari ring R disebut ideal kiri dan kanan dari R jika untuk setiap $r \in R$ dan setiap $a \in A$ keduanya ra dan ra berada dalam A.*

Untuk menguji keberadaan ideal ring dilakukan dengan menggunakan teorema berikut ini:

Teorema 2.2. [2] *Suatu subhimpunan tak kosong A dari ring R adalah suatu ideal dari R jika,*

1. $a-b \in A$ *untuk* $a, b \in A$.
2. ra *dan* ar *dalam* A *untuk* $a \in A$ *dan* $r \in R$.

Ring faktor yang merupakan analogi dari grup faktor pada struktur grup yakni himpunan semua koset yang dimunculkan dengan teorema sebagai berikut:

Teorema 2.3. [2] *Misalkan R ring dan A subring dari R. Himpunan dari koset $\{r+A \mid r \in R\}$ adalah ring atas operasi $(s+A)+(t+A)=s+t+A$ dan $(s+A)(t+A)=st+A$ jika dan hanya jika A adalah ideal dari R.*

Homomorfisme ring yang merupakan perluasan dari konsep homomorfisme grup didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.5. [2] *Suatu homomorfisme ring ϕ dari ring R ke ring S adalah pemetaan dari R ke S yang melanggengkan dua operasi ring; yakni untuk setiap a, b dalam R,*

$$\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b) \text{ dan } \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Homomorfisme ring yang keduanya bersifat satu-satu dan onto disebut isomorfisme ring.

C. Grup *Fuzzy*

Pengembangan struktur aljabar grup ke grup *fuzzy* yang dilakukan oleh Ajmal [5] yang kemudian dilakukan pada semigrup ke semigrup *fuzzy* oleh Karyati [3], menghasilkan beberapa sifat-sifat dari grup *fuzzy* dan semigrup *fuzzy*. Sifat-sifat tersebut dikaji dengan memanfaatkan sifat subhimpunan level dan subhimpunan level kuat serta peta dan pra-peta homomorfisme. Didefinisikan Grup *fuzzy* sebagai berikut.

Definisi 2.6. [5] *Misalkan G merupakan suatu grup. Subhimpunan fuzzy μ dari G disebut subgrup fuzzy dari G jika $\forall x, y \in G$,*

i. $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
ii. $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Struktur aljabar grup mengenal istilah subgrup normal, pada grup *fuzzy* diberikan definisi normal grup *fuzzy* sebagai berikut.

Definisi 2.7. [8] *Misalkan G Grup. Suatu subgrup fuzzy μ dari G disebut normal jika $\mu(x)=\mu(y^{-1}xy)$ untuk setiap $x, y \in G$.*

Lebih lanjut secara sederhana dijelaskan oleh Ajmal mengenai normal yakni misalkan elemen identitas dari G adalah e, jika $\mu(e)=t$, dan μ disebut normal jika $\mu(xy)=\mu(yx)$ untuk setiap $x, y \in G$. Bagian penting pada penelitian ini yakni konsep pembuktian sifat-sifat pada ring *fuzzy* didasarkan pada sifat subhimpunan level μ_t maupun subhimpunan level kuat $\mu_t^{>}$ yang didefinisikan oleh Ajmal sebagai berikut:

Definisi 2.8. [5] *Misalkan* μ *merupakan himpunan fuzzy dalam himpunan* S *dan* $t \in [0,1]$. *Maka, subhimpunan level* (μ_t) *dan subhimpunan level kuat* $(\mu_t^>)$ *dari* μ *didefinisikan,*

i. $\mu_t = \{x \in S \mid \mu(x) \geq t\}$,
ii. $\mu_t^> = \{x \in S \mid \mu(x) > t\}$.

Pada bagian lain dari pembuktian mengenai sifat-sifat dari ring *fuzzy* juga memanfaatkan peta dan pra-peta homomorfisme dari ring. Pemetaan tersebut didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.9. [5] *Misalkan* f *pemetaan dari grup* G *ke grup* G', μ *dan* η *masing-masing merupakan himpunan fuzzy dari grup* G *dan grup* G'. *Peta homomorfis* $f(\mu)$ *didefinisikan untuk setiap* $y \in G'$ *berlaku:*

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & jika\ f^{-1}(y) \neq 0, \\ 0 & jika\ f^{-1}(y) = 0, \end{cases}$$

Prapeta dari $f^{-1}(\eta)$ *didefinisikan untuk setiap* $x \in G$ *berlaku:*

$$f^{-1}(\eta)(x) = \eta\big(f(x)\big), untuk\ x \in G.$$

Beberapa sifat yang diperoleh dari kajian Ajmal [1] diantaranya:

Proposisi 2.1. [5] *Misalkan* μ *merupakan himpunan fuzzy dalam grup* G. *Maka,* μ *adalah subgrup fuzzy dari* G *jika dan hanya jika untuk setiap subhimpunan level tak kosong dari* μ *adalah subgrup dari* G.

Sebagai akibat dari proposisi di atas diperoleh sifat berikut:

Proposisi 2.2. [5] *Misalkan* μ *merupakan himpunan fuzzy dalam grup* G. *Maka,* μ *adalah subgrup fuzzy dari* G *jika dan hanya jika untuk setiap subhimpunan level* μ_t *untuk* $t \in Im\, \mu$ *adalah subgrup dari* G.

Sifat lain yang diperoleh ajmal yakni:

Proposisi 2.3. [5] *Subgrup fuzzy* μ *dari* G *adalah suatu normal jika dan hanya jika untuk setiap subhimpunan level tak kosong* μ_t *adalah subgrup normal dari* G.

Sifat pada **Proposisi 3.** memberikan akibat berikut:

Proposisi 2.4. [5] *Subgrup fuzzy* μ *dari* G *adalah normal fuzzy jika dan hanya jika untuk setiap subhimpunan level* μ_t *untuk* $t \in Im\, \mu$ *adalah subgrup normal dari G.*

Hasil Dan Pembahasan

A. Ring *Fuzzy*

Ring merupakan struktur aljabar yang berkenaan dengan dua operasi biner. Untuk menentukan suatu himpunan bagian dari suatu ring merupakan subring, harus menunjukkan bahwa operasi pada subring merupakan ring. Berdasarkan **Teorema 2.1.,** syarat perlu dan cukup agar suatu himpunan bagian tidak kosong merupakan subring yakni jika tertutup terhadap pengurangan dan perkalian. Sehingga didefinisikan ring *fuzzy* sebagai berikut.

Definisi 3.1. [7] *Misalkan* R *merupakan ring, suatu himpunan fuzzy* μ *dari* R *disebut ring fuzzy dari* R *apabila untuk setiap* $x, y \in R$ *berlaku,*

i. $\mu(x - y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
ii. $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Definisi 3.1. di atas, berikut ini diberikan contoh ring *fuzzy*.

Contoh 3.1. *Diberikan* $P = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ *dengan penjumlahan dan perkalian modulo 15 merupakan suatu ring. Selanjutnya didefinisikan pemetaan* δ *dari* P *ke* $[0,1]$ *sebagai berikut*

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}, untuk\ x = 0, \\ \frac{1}{2}, untuk\ x = 3, 6, 9, 12. \end{cases}$$

Kemudian ditunjukkan bahwa δ *merupakan ring fuzzy dari* P *yaitu memenuhi:*

i. $\alpha(x - y) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$, *untuk setiap* $x, y \in P$

Bukti dilakukan dengan melihat Tabel 3.1 berikut.

Tabel 1. Tabel Cayley pengurangan dari P_{15}.

$-_{15}$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$
$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$
$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$
$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$
$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$
$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$

Dengan memperhatikan Tabel 3.1 dari P untuk pengurangan modulo 15, *diperoleh bahwa untuk setiap $x, y \in P$ memenuhi $\delta(x-y) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\}$. Jadi aksioma pertama ring fuzzy berlaku.*

ii. $\alpha(xy) \geq \min\{\alpha(x), \alpha(y)\}$, *untuk setiap $x, y \in P$*
Dengan menggunakan cara yang sama pada pembuktian aksioma pertama diperoleh Tabel 2.3 di bawah ini.

Tabel 2. Tabel Cayley perkalian dari P_{15}.

$\times_{15}$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$
$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$
$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$
$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$
$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$
$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(0,\frac{4}{5}\right)$	$\left(6,\frac{1}{2}\right)$	$\left(12,\frac{1}{2}\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(9,\frac{1}{2}\right)$

Berdasarkan Tabel 2.3 di atas, terbukti bahwa aksioma kedua ring fuzzy $\delta(xy) \geq \min\{\delta(x), \delta(y)\}, \forall x, y \in P$ terpenuhi. □

Kajian dilakukan terhadap ring *fuzzy* dengan kaitannya terhadap ring klasik sehingga memunculkan suatu sifat dari ring *fuzzy* dan ring klasik. Diberikan sifat ring *fuzzy* berikut dengan memanfaatkan sifat subhimpunan level.

Proposisi 3.1. *Misalkan μ himpunan fuzzy dari ring R. Himpunan fuzzy μ merupakan subring fuzzy dari ring R jika dan hanya jika, untuk setiap subhimpunan level μ_t tak kosong dari μ dengan $t \in [0,1]$ merupakan subring dari ring R.*

Bukti. $(\Rightarrow)$

Untuk membuktikan μ_t subring, dibuktikan bahwa μ_t tertutup terhadap pengurangan dan perkalian. Untuk sebarang $x, y \in \mu_t$, berlaku, $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$. Diketahui μ merupakan subring *fuzzy* sehingga memenuhi.

i. Tertutup terhadap pengurangan, yaitu untuk $\forall x, y \in \mu_t$ berlaku $(x-y) \in \mu_t$ atau $\mu(x-y) \geq t$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mu(x-y) \geq t$. Berdasarkan **Definisi 3.1.** berlaku
$$\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$
$$\geq \min\{t, t\} = t.$$

ii. Tertutup terhadap perkalian, yaitu untuk $\forall x, y \in \mu_t$ berlaku $x, y \in \mu_t$ atau $\mu(xy) \geq t$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mu(xy) \geq t$. Berdasarkan **Definisi 3.1.** berlaku,
$$\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$
$$\geq \min\{t, t\} = t.$$

Jadi terbukti bahwa untuk setiap subhimpunan level μ_t tak kosong dari subring *fuzzy* μ merupakan subring dari ring R.

$(\Leftarrow)$

Diketahui $\forall \mu_t \neq \emptyset$ subring dari R, sehingga untuk sebarang $x, y \in \mu_t$ dipenuhi.

i. $(x-y) \in \mu_t$ atau $\mu(x-y) \geq t$,
ii. $(xy) \in \mu_t$ atau $\mu(xy) \geq t$.

Akan dibuktikan bahwa μ merupakan ring *fuzzy* yakni memenuhi, $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$, dan $\mu(xy) \geq t_2 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Ambil sebarang $x, y \in R$ dengan $\mu(x) \geq \mu(y)$. Misalkan $\mu(x) = t_1$ dan $\mu(y) = t_2$, maka $x \in \mu_{t_1}, y \in \mu_{t_2}$. Hal ini menunjukkan bahwa $\mu_{t_1}, \mu_{t_2} \neq \emptyset$, sehingga μ_{t_1} dan μ_{t_2} adalah subring dari R. Berdasarkan kondisi $\mu(x) \geq \mu(y)$ diperoleh $t_1 \geq t_2$ mengakibatkan $\mu_{t_1} \subseteq \mu_{t_2}$, sehingga untuk $x \in \mu_{t_1}$ maka $x \in \mu_{t_2}$. Oleh karena setiap $\mu_t \neq \emptyset$ merupakan subring dari R, sehingga $x \in \mu_{t_2}$ dan $y \in \mu_{t_2}$ berakibat $(x-y) \in \mu_{t_2}$ dan $(xy) \in \mu_{t_2}$ untuk $x, y \in R$. Dengan demikian berlaku:

$$\mu(x-y) \geq t_2 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}$$

dan
$\mu(xy) \geq t_2 = \min\{\mu(x), \mu(y)\}.$
Dengan demikian berdasarkan **Persamaan** $(\mathbf{3.1})$ dan **Persamaan** $(\mathbf{3.2})$ terbukti bahwa μ subring *fuzzy* dari R. Jadi **Proposisi 3.1.** terbukti. ∎

B. Ideal Ring *Fuzzy*

Pada struktur aljabar ring, subring dengan sifat khusus disebut ideal yakni ideal kiri sama dengan ideal kanannya. Dalam ring *fuzzy* juga terdapat ideal *fuzzy*. Berdasarkan **Teorema 2.2.** dengan mempertimbangkan syarat cukup dan perlu suatu ideal, diberikan definisi ideal ring *fuzzy* sebagai berikut.

Definisi 3.2. [8] *Suatu subhimpunan fuzzy μ dari ring R disebut sebagai ideal fuzzy dari R jika untuk setiap $x, y \in R$,*
i. $\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
ii. $\mu(xy) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Untuk lebih jelasnya mengenai **Definisi 3.2.** di atas diberikan contoh ideal ring *fuzzy* sebagai berikut.

Contoh 3.2. *Himpunan bilangan bulat modulo 6 ($\mathbb{Z}_6$) merupakan ring dengan operasi biner ($\mathbb{Z}_6, +_6$) merupakan grup abelian dan operasi biner ($\mathbb{Z}_6, \times_6$) merupakan semigrup serta terhadap operasi ($\mathbb{Z}_6, +_6, \times_6$) berlaku hukum distributif. Selanjutnya didefinisikan pemetaan γ dari $\mathbb{Z}_6$ ke $[0,1]$ sebagai berikut.*

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{7}{10}, \textit{untuk } x = 0, 2, 4, \\ \frac{3}{10}, \textit{untuk } x \textit{ yang lain.} \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa γ ideal ring fuzzy dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu memenuhi aksioma berikut:

i. $\gamma(x-y) \geq \min\{\gamma(x), \gamma(y)\}$, *untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$.*
Misalkan $P = \{0, 2, 4\}$ dan $Q = \{1, 3, 5\}$, terdapat beberapa kemungkinan yang terjadi diantaranya:
a. *Untuk sebarang $x \in P$ dan $y \in Q$ maka,*
$$\min\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \min\left\{\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right\} = \frac{3}{10}.$$
Karena $(x-y) \in Q$,
$$\gamma(x-y) = \frac{3}{10}. \quad (3.2)$$
Dengan demikian dipenuhi $\gamma(x-y) \geq \min\{\gamma(x), \gamma(y)\}$.
b. *Untuk sebarang $x \in Q$ dan $y \in P$ maka,*
$$\min\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \min\left\{\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right\} = \frac{3}{10}.$$
Karena $(x-y) \in Q$,
$$\gamma(x-y) = \frac{3}{10}.$$
Dengan demikian dipenuhi $\gamma(x-y) \geq \min\{\gamma(x), \gamma(y)\}$.
c. *Untuk sebarang $x, y \in P$ maka,*
$$\min\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \min\left\{\frac{7}{10}, \frac{7}{10}\right\} = \frac{7}{10}.$$
Karena $(x-y) \in P$,
$$\gamma(x-y) = \frac{7}{10}.$$
Dengan demikian dipenuhi $\gamma(x-y) \geq \min\{\gamma(x), \gamma(y)\}$.
d. *Untuk sebarang $x, y \in Q$ maka,*
$$\min\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \min\left\{\frac{3}{10}, \frac{3}{10}\right\} = \frac{3}{10}.$$
Karena $(x-y) \in P$,
$$\gamma(x-y) = \frac{7}{10}.$$
Dengan demikian dipenuhi $\gamma(x-y) \geq \min\{\gamma(x), \gamma(y)\}$.

Berdasarkan bukti di atas disimpulkan bahwa aksioma pertama ideal fuzzy berlaku.

ii. $\gamma(xy) \geq \max\{\gamma(x), \gamma(y)\}$, *untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$.*
Dengan memperhatikan setiap kemungkinan yang terjadi, diperoleh:
a. *Untuk sebarang $x \in P$ dan $y \in Q$ maka,*
$$\max\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \max\left\{\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right\} = \frac{7}{10}.$$
Karena $(xy) \in P$ dan $(xy) \in P$,
$$\gamma(xy) = \frac{7}{10}, \textit{ dan } \gamma(xy) = \frac{7}{10}.$$
Dengan semikian dipenuhi $\gamma(xy) \geq \max\{\gamma(x), \gamma(y)\}$.
b. *Untuk sebarang $x, y \in P$ maka,*
$$\max\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \max\left\{\frac{7}{10}, \frac{7}{10}\right\} = \frac{7}{10}.$$
Karena $(xy) \in P$,
$$\gamma(xy) = \frac{7}{10}.$$
Dengan semikian dipenuhi $\gamma(xy) \geq \max\{\gamma(x), \gamma(y)\}$.
c. *Untuk sebarang $x, y \in Q$ maka,*

$\max\{\gamma(x),\gamma(y)\} = \max\left\{\frac{3}{10},\frac{3}{10}\right\} = \frac{3}{10}.$

Karena $(xy) \in Q$,

$\gamma(xy) = \frac{3}{10}$.

Dengan semikian dipenuhi $\gamma(xy) \geq \max\{\gamma(x),\gamma(y)\}$.

Berdasarkan bukti di atas, dipenuhi aksioma kedua ideal ring fuzzy sehingga γ *merupakan ideal ring fuzzy dari* $\mathbb{Z}_6$. □

Pada struktur aljabar ring, ideal juga merupakan subring. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ideal ring *fuzzy* juga merupakan ring *fuzzy*. Berdasarkan definisi ideal *fuzzy* $\mu(xy) \geq \max\{\mu(x),\mu(y)\}$. Diketahui bahwa $\max\{\mu(x),\mu(y)\} \geq \min\{\mu(x),\mu(y)\}$ sehingga $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x),\mu(y)\}$. Dengan demikian ideal ring *fuzzy* merupakan suatu ring *fuzzy*.

Berikut ini akan diselidiki sifat dari ideal ring *fuzzy* dengan mempergunakan subhimpunan level dari himpunan *fuzzy*.

Proposisi 3.2. *Suatu subring fuzzy* μ *dari ring* R *merupakan ideal fuzzy jika dan hanya jika, untuk setiap subhimpunan tak kosong dari* μ_t *dengan* $t \in [0,1]$ *merupakan ideal ring dari ring* R.

Bukti. $(\Rightarrow)$

Misalkan μ merupakan subring *fuzzy* dari R dan μ adalah ideal *fuzzy*. Berdasarkan **Proposisi 3.1.1.** sehingga **subhimpunan** tak kosong maka μ_t adalah subring. Misalkan $x, y \in \mu_t$ karena μ merupakan ideal *fuzzy* maka berlaku,

i. Untuk $\forall x, y \in \mu_t$ berlaku $(x - y) \in \mu_t$ atau $\mu(x - y) \geq t$.
Dibuktikan bahwa $\mu(x - y) \geq t$. Berdasarkan **Definisi 3.2.** berlaku
$$\mu(x-y) \geq \min\{\mu(x),\mu(y)\}, \geq \min\{\mu(t),\mu(t)\} \geq t.$$
Jadi $\mu(x - y) \geq t$ atau $(x - y) \in \mu_t$.

ii. Untuk $\forall x \in \mu_t$ dan $\forall y \in R$ berlaku $(xy) \in \mu_t$ atau $\mu(xy) \geq t$.
Akan dibuktikan bahwa $\mu(xy) \geq t$. Berdasarkan **Definisi 3.2.** untuk $\forall x \in \mu_t$ dan $\forall y \in R$ maka $\mu(x) \geq t$ dan $\mu(y) \geq t$ atau $\mu(y) < t$, sehingga berlaku
$$\mu(xy) \geq \max\{\mu(x),\mu(y)\} \geq \max\{t,t\} = t.$$
Jadi $\mu(xy) \geq t$ atau $(xy) \in \mu_t$.

Dengan demikian terbukti bahwa untuk setiap subhimpunan level μ_t tak kosong dari ideal *fuzzy* μ adalah ideal ring dari R.

$(\Leftarrow)$

Ambil sebarang $x, y \in R$ dan $\mu(x) \geq \mu(y)$ dengan $\mu(x) = t_1$ dan $\mu(y) = t_2$, sehingga $x \in \mu_{t_1}$ dan $y \in \mu_{t_2}$. Karena μ_{t_1} dan μ_{t_2} adalah subhimpunan tak kosong dari μ maka μ_{t_1} dan μ_{t_2} adalah ideal dari R, berdasarkan **Teorema 2.2.** menyebabkan $(x - y) \in \mu_{t_2}$ dan $(xa) \in \mu_{t_2}$ untuk $a \in R$. Sehingga
$$\mu(x-y) \geq t_2 = \min\{\mu(x),\mu(y)\},$$
$$\mu(xa) \geq t_2 = \max\{\mu(x),\mu(a)\}.$$
Jadi terbukti bahwa μ_t adalah ring *fuzzy* dari R. Sehingga **Proposisi 3.2.1** terbukti.■

C. Homomorfisme Ring *Fuzzy*

Terkait dengan pemetaan ring dengan subhimpunan *fuzzy* dari ring domain dan ring kodomain didefinisikan peta homomorfis dan prapeta ring *fuzzy* yang didasarkan dari **Definisi 2.9.** sebagai berikut:

Definisi 3.3. *Misalkan* R *dan* R' *suatu ring dan* f *suatu pemetaan dari* R *ke* R'. μ *dan* γ *masing masing merupakan ring fuzzy dari ring* R *dan ring* R'. *Peta homomorfis* $f(\mu)$ *didefinisikan sebagai berikut:*
$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu(x)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$
untuk setiap $y \in R'$.

Pra-peta $f^{-1}(\gamma)$ *didefinisikan sebagai berikut:*
$$f(\gamma)(x) = \gamma(f(x)),$$
untuk setiap $x \in R$.

Untuk lebih jelas mengenai **Definisi 3.3,** diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 3.3. *Misalkan dibentuk pemetaan* $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_7$ *yang didefinisikan sebagai* $f(x) = 3x$. *Didefinisikan* μ *dan* γ *masing-masing subhimpunan fuzzy dari* $\mathbb{Z}_6$ *dan* $\mathbb{Z}_7$ *sebagai berikut:*

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ \frac{7}{10}, x = 1, 5 \\ \frac{2}{5}, x = 2, 3 \\ \frac{1}{5}, x = 4 \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{9}{10}, & x = 6 \\ \frac{7}{10}, & x = 1, 5 \\ \frac{1}{2}, & x = 2, 4 \\ \frac{1}{5}, & x = 0, 3 \end{cases}$$

Dari definisi di atas yang dimaksud dengan $f(\mu)(y)$ adalah :

i. *Untuk* $y = 0$, *diperoleh*
$$f(\mu)(0) = \sup_{x \in f^{-1}(0)}\{\mu(x)\}$$
$$= \sup_{\{0,4\} \subseteq f^{-1}(0)} \{\mu(0), \mu(4)\}$$
$$= \sup_{\{0,4\} \subseteq f^{-1}(0)} \left\{1, \frac{1}{5}\right\}$$
$$= 1.$$
ii. *Untuk* $y = 1$, *diperoleh* $f(\mu)(1) = 0$ *karena* $f^{-1}(1) = \emptyset$.
iii. *Untuk* $y = 2$, *diperoleh* $f(\mu)(2) = 0$ *karena* $f^{-1}(2) = \emptyset$.
iv. *Untuk* $y = 3$, *diperoleh*
$$f(\mu)(3) = \sup_{x \in f^{-1}(3)} \{\mu(x)\}$$
$$= \sup_{\{1,3,5\} \subseteq f^{-1}(3)} \{\mu(1), \mu(3), \mu(5)\}$$
$$= \sup_{\{1,3,5\} \subseteq f^{-1}(2)} \left\{\frac{7}{10}, \frac{2}{5}, \frac{7}{10}\right\}$$
$$= \frac{7}{10}.$$
v. *Untuk* $y = 4$, *diperoleh* $f(\mu)(4) = 0$ *karena* $f^{-1}(4) = \emptyset$.
vi. *Untuk* $y = 5$, *diperoleh* $f(\mu)(5) = 0$ *karena* $f^{-1}(5) = \emptyset$.
vii. *Untuk* $y = 6$, *diperoleh*
$$f(\mu)(6) = \sup_{x \in f^{-1}(6)} \{\mu(x)\}$$
$$= \sup_{\{2\} \subseteq f^{-1}(6)} \{\mu(2)\}$$
$$= \sup_{\{2\} \subseteq f^{-1}(6)} \left\{\frac{2}{5}\right\}$$
$$= \frac{2}{5}.$$

Untuk $f^{-1}(\gamma)(x) = \gamma(f(x))$ *diperoleh sebagai berikut:*

i. *Untuk* $x = 0$, *diperoleh*
$$f^{-1}(\gamma)(0) = \gamma(f(0)) = \gamma(0) = \frac{1}{5}.$$
ii. *Untuk* $x = 1$, *diperoleh*
$$f^{-1}(\gamma)(1) = \gamma(f(1)) = \gamma(3) = \frac{1}{5}.$$
iii. *Untuk* $x = 2$, *diperoleh*
$$f^{-1}(\gamma)(2) = \gamma(f(2)) = \gamma(6) = \frac{9}{10}.$$
iv. *Untuk* $x = 3$, *diperoleh*
$$f^{-1}(\gamma)(3) = \gamma(f(3)) = \gamma(3) = \frac{1}{5}.$$
v. *Untuk* $x = 4$, *diperoleh*
$$f^{-1}(\gamma)(4) = \gamma(f(4)) = \gamma(0) = \frac{1}{5}.$$
vi. *Untuk* $x = 5$, *diperoleh*
$$f^{-1}(\gamma)(5) = \gamma(f(5)) = \gamma(3) = \frac{1}{5}. \quad \square$$

Diberikan proposisi berikut yang memiliki sifat subhimpunan level dari peta homomorfik $f(\mu)$.

Proposisi 3.3 *Jika f pemetaan dari ring R ke ring R' dan μ subhimpunan fuzzy dari ring R, maka* $\left(f(\mu)\right)_t = \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$, *dengan* $t \in [0,1]$.

Bukti. Berdasarkan definisi subhimpunan level, maka diperoleh:
$$\left(f(\mu)\right)_t = \{y \in R' \mid f(\mu)(y) \geq t\},$$
dan
$$f(\mu_{t-\varepsilon}) = f\{x \in R \mid \mu(x) \geq t - \epsilon\}.$$
Diperoleh $t - \varepsilon \geq t$, berlaku $\mu_t \subseteq \mu_{t-\varepsilon}$. Proposisi di atas dibuktikan dengan meninjau dari dua kejadian sesuai dengan definisi $f(\mu)$.

i. Untuk kejadian $f^{-1}(y) = \emptyset$.
Akan dibuktikan jika $y \in \left(f(\mu)\right)_t$ maka $y \in \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$. Ambil sebarang $y \in \left(f(\mu)\right)_t$, untuk $t \in [0,1]$. Akibatnya diperoleh $f(\mu)(y) \geq t$ untk $t \in [0,1]$. Sedangkan untuk $f^{-1}(y) = \emptyset$, maka $f(\mu)(y) = 0$. Dengan demikian tidak ada $y \in \left(f(\mu)\right)_t$ untuk $t \in [0,1]$. Sehingga pernyataan ambil sebarang $y \in \left(f(\mu)\right)_t$, untuk $t \in [0,1]$ bernilai salah. Untuk anteseden bernilai salah maka apapun konsekuennya implikasi bernilai benar. Jadi untuk $f^{-1}(y) = \emptyset$ berlaku:
$$(f(\mu))_t \subseteq \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-e})$$
Kemudian akan dibuktikan jika $y \in \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$ maka $y \in \left(f(\mu)\right)_t$. misalkan

$y \in \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$ maka $y \in f(\mu_{t-\varepsilon})$ untuk setiap $t > \varepsilon > 0$. Akibatnya berlaku $y = f(x)$ untuk suatu $x \in R$ dengan $\mu(x) \geq t$. Dengan demikian $x \in f^{-1}(y)$. Sehingga kontradiksi dengan $f^{-1} = \emptyset$. Jadi pernyataan $y \in \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$ bernilai salah. Berakibat imlikasi jika $y \in \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$ maka $y \in \left(f(\mu)\right)_t$ bernilai benar. Jadi untuk $f^{-1}(y) = \emptyset$ berlaku:

$$\bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon}) \subseteq (f(\mu))_t$$

Dari dua kondisi di atas terbukti bahwa $\left(f(\mu)\right)_t = \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$.

ii. Untuk kejadian $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.
Misalkan $y = f(x) \in R'$ memenuhi $f(\mu)(y) \geq t$ atau $y \in \left(f(\mu)\right)_t$, diperoleh:

$$fa(\mu)\big(f(x)\big) = \sup_{x \in f^{-1}(f(x))} \{\mu(x)\} \geq t.$$

Untuk $t > \varepsilon > 0$ dimiliki $y = f(x_\varepsilon) \in f(\mu_{t-\varepsilon})$ atau $y \in f(\mu_{t-\varepsilon})$. Dengan demikian berlaku:

$$(f(\mu))_t \subseteq \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-e}) \qquad \textbf{(3.3)}$$

Sebaliknya, ambil sebarang $y \in \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$, sehingga $y \in f(\mu_{t-\varepsilon})$ untuk setiap $t > \varepsilon > 0$. Sehingga terdapat elemen $x_\varepsilon \in \mu_{t-\varepsilon}$ sedemikian sehingga berlaku $y = f(x_\varepsilon)$. Akibatnya untuk setiap $t > \varepsilon > 0$ terdapat $x_\varepsilon \in f^{-1}(y)$ dengan $\mu(x_\varepsilon) \geq t - \varepsilon$ sedemikian sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} f(\mu)(y) &= \sup_{x_i \in f^{-1}(f(x))} \{\mu(x_i)\} \\ &\geq \sup_{t>\varepsilon>0} \{\mu(t-\varepsilon)\} = t. \end{aligned}$$

Diperoleh $y \in f(\mu)_t$. Dengan demikian didapat:

$$\bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon}) \subseteq (f(\mu))_t \qquad \textbf{(3.4)}$$

Dari **Persamaan (3.3)** dan **Persamaan (3.4)** terbukti bahwa

$$\left(f(\mu)\right)_t = \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon}).$$ ■

Proposisi berikut merupakan syarat cukup untuk suatu pemetaan f agar peta homomorfik $f(\mu)$ membentuk suatu subring *fuzzy*.

Proposisi 3.4. *Jika f homomorfisme dari ring R ke R' dan μ subring fuzzy pada R, maka $f(\alpha)$ membentuk subring fuzzy pada R'.*

Bukti. Diketahui μ subring *fuzzy* pada R dan f homomorfisme dari R ke R'. Untuk $t = 0$, maka $f(\mu)_0 = \{y \in R' \mid f(\mu)(y) \geq 0\} = R'$. Jelas membuktikan bahwa $f(\mu)_t$ subring sekaligus ring itu sendiri. Selanjutnya untuk $t \in (0,1]$, maka diperoleh $f(\mu)_t = \bigcap_{t>\varepsilon>0} f(\mu_{t-\varepsilon})$. Diketahui bahwa untuk $\varepsilon > 0$, maka μ_t membentuk subring pada R. Untuk f homomorfisme ring, maka $f(\mu_t)$ merupakan subring dari ring R'. Berdasarkan sifatnya, sehingga $f(\mu)_t$ subring *fuzzy* dari R'. ■

Selain peta homomorfik, terdapat pula pra peta subhimpunan *fuzzy* sehingga diperoleh proposisi berikut:

Proposisi 3.5. *Misalkan f homomorfisme ring dari R ke R'. Jika μ subring fuzzy dari ring R', maka $f^{-1}(\mu)$ subring fuzzy dari ring R.*

Bukti.
Ambil sebarang $x, y \in R$ dengan $x = y$. Diketahui f homomorfisme, maka berakibat $f(x) = f(y)$. Berdasarkan **Definisi 3.3.** dan diketahui μ suatu pemetaan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mu)(x) &= \mu\big(f(x)\big) = \mu\big(f(y)\big) \\ &= f^{-1}(\mu)(y). \end{aligned}$$

Dengan demikian $f^{-1}(\mu)$ merupakan pemetaan dari R ke interval tertutup $[0,1]$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa pra peta $f^{-1}(\mu)$ membentuk suatu subring. Ambil sebarang $x, y \in R$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mu)(x-y) &= \mu\big(f(x-y)\big) \\ &= \mu\big(f(x) + f(-y)\big) \\ &= \mu\Big(f(x) + \big(-f(y)\big)\Big) \\ &= \mu\big(f(x) - f(y)\big) \\ &\geq \min\{\mu\big(f(x)\big), \mu\big(f(y)\big)\} \\ &= \min\{f^{-1}(\mu)(x), f^{-1}(\mu)(y)\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$f^{-1}(\mu)(xy) = \mu(f(xy))$
$= \mu(f(x)f(y))$
$\geq \min\{\mu(f(x)), \mu(f(y))\}$
$= \min\{f^{-1}(\mu)(x), f^{-1}(\mu)(y)\}$.

Jadi terbukti bahwa $f^{-1}(\mu)$ merupakan subring *fuzzy* dari R. ∎

Berikut ini sifat dari pra peta homomorfisme terkait dengan subhimpunan level dari subhimpunan *fuzzy*.

Proposisi 3.6. *Misalkan* $f : R \to R'$ *homomorfisme surjektif. Jika* μ *subring fuzzy dari ring* R, *maka berlaku* $f^{-1}(\mu_t) = (f^{-1}(\mu))_t$.

Bukti.
Berdasarkan definisi diperoleh:

$(f^{-1}(\mu))_t = \{x \in R \mid f^{-1}(\mu)(x) \geq t\}$
$= \{x \in R \mid \mu(f^{-1}(x)) \geq t\}$.

Selain itu juga berlaku bahwa:

$f^{-1}(\mu_t) = f^{-1}\{y \in R' \mid \mu(y) \geq t\}$
$= \{x \in R \mid f(x) = y, \mu(y) \geq t\}$
$= \{x \in R \mid \mu(f(x)) \geq t\}$.

Diperoleh,

$f^{-1}(\mu_t) = \{x \in R \mid \mu(f(x)) \geq t\}$
$= (f^{-1}(\mu))_t$.

Jadi terbukti bahwa:

$f^{-1}(\mu_t) = (f^{-1}(\mu))_t$.

Diberikan proposisi mengenai sifat subhimpunan level kuat peta homomorfik subring *fuzzy* berikut.

Proposisi 3.7. *Jika* $f : R \to R'$ *merupakan homomorfisme ring yang surjektif dan* μ *subring fuzzy dari ring* R, *maka untuk* $t \in [0,1]$ *berlaku :*

$$(f(\mu))_t^{>} = f(\mu_t^{>}).$$

Bukti.
Berdasarkan definisi dari setiap notasi himpunan di atas. Diperoleh himpunan $(f(\mu))_t^{>}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$(f(\mu))_t^{>} = \{y \in R' \mid (f(\mu))(y) > t\}$
$= \left\{y \in R' \mid \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu(x)\} > t\right\}$
$= \{ y \in R' \mid \mu(x) > t,$
$untuk\ x \in f^{-1}(y)\}$.

Himpunan $f(\mu_t^{>})$ didefinisikan sebagai berikut:

$f(\mu_t^{>}) = \{ y \in R' \mid f(x) = y,$
$\mu(x) > t$ untuk suatu $x \in R\}$
$= \{ y \in R' \mid \mu(x) > t,$
untuk suatu $x \in f^{-1}(y)\}$.

Berdasarkan sifat subhimpunan level pada **Proposisi 3.3.** dan subhimpunan level kuat pada **Proposisi 3.7.** di atas diperoleh sifat subhimpunan level subring *fuzzy* berikut:

Proposisi 3.8. *Jika* $f : R \to R'$ *merupakan homomorfisme ring surjektif dan* μ *subring fuzzy dari ring* R, *maka berlaku* $f(\mu)_t = f(\mu_t)$.

Bukti.
Berikut ini akan disajikan pembuktian lengkap **Proposisi 3.8.**

i. Dibuktikan $f(\mu)_t \subseteq f(\mu_t)$
   Ambil sebarang $a \in f(\mu)_t \Rightarrow (f(\mu))(a) \geq t)$
   $\Rightarrow \sup_{x \in f^{-1}(a)} \{\mu(x)\} \geq t$
   $\Rightarrow \mu(x) \geq t$, untuk suatu $x \in f^{-1}(a)$
   $\Rightarrow f(x) = a, \mu(x) \geq t$, untuk suatu $x \in R$
   $\Rightarrow a \in f(\mu_t)$.
   Jadi $f(\mu)_t \subseteq f(\mu_t)$.
ii. Dibuktikan $f(\mu_t) \subseteq f(\mu)_t$
   Ambil $a \in f(\mu_t) \Rightarrow (\exists x \in R) f(x) = a$ dan $\mu(x) \geq t$
   $\Rightarrow x \in f^{-1}(a)$dan $\mu(x)$
   $\geq t$, untuk suatu $x \in R$
   $\Rightarrow \mu(x) = \sup_{x \in f^{-1}(a)} \{\mu(x)\} \geq t$
   $\Rightarrow (f(\mu))(a) \geq t$
   $\Rightarrow a \in f(\mu_t)$.
   Jadi $f(\mu_t) \subseteq f(\mu)_t$.

D. Ring Hasil Bagi *Fuzzy*

Ring hasil bagi *fuzzy* diinspirasi dari tulisan Karyati [3] mengenai subsemigrup hasil bagi *fuzzy*. Ring hasil bagi *fuzzy* diawali dengan pembentukan ring hasil bagi yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya. Jika $f : R \to R'$ adalah homomorfisme ring dengan kernel I, sehingga diperoleh himpunan $R/I = \{[x]_I \mid x \in R\}$. himpunan R/I membentuk ring terhadap operasi $xI.yI = (xy)I$ dan $xI + yI = (x+y)I$. Ring R/I demikian disebut sebagai ring hasil bagi (ring faktor).

Dibentuk pemetaan dari R/I ke interval tertutup $[0,1]$, yang didefinisikan sebagai: $(\mu/I)([x]_I) = \inf_{(x,i)\in I}\{\mu(i)\}$, sebab untuk $[x]_I = [y]_I$ berakibat $(x,y) \in I$. Dengan demikian μ/I merupakan himpunan *fuzzy* dari ring R/I. Selanjutnya diperoleh:

$$\left(\frac{\mu}{I}\right)([x]_I) = \inf_{(x,i)\in I}\{\mu(i)\}$$
$$= \inf_{(y,i)\in I}\{\mu(i)\}$$
$$= (\mu/I)([x]_I).$$

Dengan demikian μ/I merupakan himpunan *fuzzy* dari ring R/I.

Diberikan sifat berikut, untuk μ adalah ring *fuzzy* dari ring R sehingga μ/I juga merupakan ring *fuzzy* dari ring R/I. Sifat tersebut terdapat pada proposisi berikut.

Proposisi 3.9. *Misalkan $f : R \to R'$ homomorfisme ring dengan kernel I. Jika μ suatu ring fuzzy dari R, maka $\mu/I : R/I \to [0,1]$ ring fuzzy dari R/I, dengan $\mu/I([x]_I) = \inf_{(x,i)\in I}\{\mu(i)\}$.*

Bukti.
Dalam hal ini akan dibuktikan bahwa:

i. $\mu/I([x]_I - [y]_I) \geq \min\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}$,
ii. $\mu/I([x]_I.[y]_I) \geq \min\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}$.

Untuk sebarang $[x]_I, [y]_I \in R/I$, berlaku:

$$\mu/I([x]_I - [y]_I) = \mu/I([x-y]_I)$$
$$= \inf_{(x-y,i)\in I}\{\mu(i)\}$$
$$= \inf_{(xy,i)\in I}\{\mu(x - y), \mu(i)\}$$
$$\geq \inf_{(xy,i_n)\in I}(\min\{\mu(x),\mu(y),\mu(yi)\})$$
$$\geq \min\left\{\inf_{(x,i)\in I}\{\mu(x),\mu(i)\}, \inf_{(y,i)\in I}\{\mu(y),\mu(i)\}\right\}$$
$$= \min\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}.$$

Selanjutnya,

$$\mu/I([x]_I.[y]_I) = \mu/I([xy]_I)$$
$$= \inf_{(xy,i)\in I}\{\mu(i)\}$$
$$= \inf_{(xy,i)\in I}\{\mu(xy),\mu(i)\}$$
$$\geq \inf_{(xy,i_n)\in I}(\min\{\mu(x),\mu(y),\mu(yi)\})$$
$$\geq \min\left\{\inf_{(x,i)\in I}\{\mu(x),\mu(i)\}, \inf_{(y,i)\in I}\{\mu(y),\mu(i)\}\right\}$$
$$= \min\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}.$$

Dengan demikian μ/I membentuk ring *fuzzy* dari ring hasil bagi R/I.

Sifat selanjutnya apabila μ adalah ideal ring *fuzzy* dari ring R maka μ/R juga merupakan ideal ring *fuzzy* dari ring R/I.

Proposisi 3.10. *Misalkan $f : R \to R'$ homomorfisme ring dengan kernelnya I. Jika μ suatu ideal ring fuzzy dari ring R, maka μ/I ideal ring fuzzy dari R/I.*

Bukti. Dalam hal ini akan dibuktikan bahwa:

i. $\mu/I([x]_I - [y]_I) \geq \min\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}$,
ii. $\mu/I([x]_I.[y]_I) \geq \max\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}$.

Untuk sebarang $[x]_I, [y]_I \in R/I$, berlaku:

$$\mu/I([x]_I - [y]_I) = \mu/I([x-y]_I)$$
$$= \inf_{(x-y,i)\in I}\{\mu(i)\}$$
$$= \inf_{(xy,i)\in I}\{\mu(x-y),\mu(i_n)\}$$
$$\geq \inf_{(xy,i)\in I}(\min\{\mu(x),\mu(y),\mu(yi)\})$$
$$\geq \min\left\{\inf_{(x,i)\in I}\{\mu(x),\mu(i)\}, \inf_{(y,i)\in I}\{\mu(y),\mu(i)\}\right\}$$
$$= \min\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}.$$

Selanjutnya, $\mu/I([x]_I.[y]_I) = \mu/I([xy]_I)$

$$= \inf_{(xy,i)\in I}\{\mu(i)\}$$
$$= \inf_{(xy,i)\in I}\{\mu(xy),\mu(i_n)\}$$
$$\geq \inf_{(xy,i)\in I}(\min\{\mu(x),\mu(y),\mu(yi)\})$$
$$\geq \min\left\{\inf_{(x,i)\in I}\{\mu(x),\mu(i)\}, \inf_{(y,i)\in I}\{\mu(y),\mu(i)\}\right\}$$
$$= \min\{\mu/I([x]_I), \mu/I([y]_I)\}.$$

Dengan demikian μ/I membentuk ideal ring *fuzzy* dari ring hasil bagi R/I.

Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa terdapat sifat dari ring *fuzzy* yang diperoleh dengan memanfaatkan subhimpunan level yaitu untuk μ himpunan *fuzzy* dari ring R merupakan subring jika dan hanya jika setiap subhimpunan level tak kosong μ_t merupakan subring dari R. Sedangkan sifat yang terdapat pada ideal ring *fuzzy* yaitu himpunan *fuzzy* μ dikatakan ideal dari ring R jika dan hanya jika setiap subhimpunan level μ_t tak kosong dari μ merupakan ideal ring dari R.

Adapun sifat-sifat yang diperoleh dengan memanfaatkan peta dan pra-peta homomorfisme dan ring hasil bagi *fuzzy* diantaranya yakni Misalkan $f: R \to R'$ homomorfisme ring dan μ subhimpunan *fuzzy* dari R'. jika μ ideal *fuzzy* pada ring R', maka $f^{-1}(\mu)$ adalah ideal *fuzzy* pada R. Jika f homomorfisme dari ring R ke R' dan μ subring *fuzzy* pada R, maka $f(\alpha)$ membentuk subring *fuzzy* pada R'. Misalkan f homomorfisme ring dari R ke R'. Jika μ subring *fuzzy* dari ring R', maka $f^{-1}(\mu)$ subring *fuzzy* dari ring R. Dan misalkan $f : R \to R'$ homomorfisme ring dengan kernelnya I. Jika μ suatu ideal ring *fuzzy* dari ring R, maka μ/I ideal ring *fuzzy* dari R/I.

Ucapan Terima Kasih

Terimakasih peneliti ucapkan kepada Universitas Negeri Yogyakarta khususnya Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam atas segala dukungan yang telah diberikan.

Pustaka

[1] C. Musili. (1992). *Introduction to Rings and Modules.* Singapore: Toppan Company.

[2]Naseem Ajmal. (1994).Homomorphism of Fuzzy Groups, Correspondence Theorem and Fuzzy Quotient Groups. *Fuzzy Sets and Systems* 61 (1994). 329-339.

[3] Karyati. (2015). Semigrup Bentuk Bilinear Fuzzy. *Disertasi Doktoral*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada

[4] George J. Klir. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.* USA: Pretice Hall PTR.

[5] Joseph A. Gallian. (2006). *Contemporary Abstract Algebra, Seventh Edition.* United States of America: Brooks/Cole Cengage Learning.

[6] W. B. Vasantha. Kandasamy (2003). *Samarandache Fuzzy Algebra.* USA: American Research Press.

[7] M. Z. Alam. (2015). Fuzzy Rings and Anti Fuzzy Rings with Operators. *Journal of Mathematics (IOSR-JM)* Volume 11, Issue 4 Ver. IV (jul – Aug 2015). 48-54.

[8] Asok Kumay Ray. (2004). A Note On Fuzzy Characteristic and Fuzzy Divisor of Zero of A ring. *Novi Sad J. Math.* Vol. 34, No. 1, 2004. 39-45.