

DESAIN ATURAN SINUS DAN ATURAN COSINUS BERBASIS PMRI

DESIGN OF SINUS AND COSINUS RULE BASED ON INDONESIAN REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION

Rika Firma Yenni, Yusuf Hartono, Ratu Ilma Indra Putri
Magister Pendidikan Matematika Program Pascasarjana UNSRI

E-mail : rika.yenni@gmail.com

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan aktivitas, prosedur, dan strategi serta perubahan dari *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) ke *Learning Trajectory* (LT) dalam merumuskan aturan sinus dan cosinus melalui pembelajaran dengan pendekatan PMRI (Pembelajaran Matematika Realistik Indonesia). Subjek penelitian ini adalah 38 siswa kelas X1 SMAN 6 Prabumulih. Penelitian ini terdiri atas tiga tahap, yaitu *preliminary design*, *design experiment (pilot experiment dan teaching experiment)*, dan *retrospective analysis*. Data dikumpulkan melalui observasi kegiatan pembelajaran, wawancara, rekaman video, dan foto. Hasil penelitian menunjukkan bahwa siswa menggunakan segitiga sebagai *starting point* dalam merumuskan aturan sinus dan cosinus melalui PMRI. Perubahan dari *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) ke *Learning Trajectory* (LT) terjadi melalui aktivitas siswa dalam mengeksplorasi segitiga dalam pembelajaran dengan pendekatan PMRI.

Kata kunci: *aturan sinus dan aturan cosinus, segitiga, design research, PMRI*

Abstract

The purpose of this study was to describe the activities, procedures, and strategies as well as the change of Hypothetical Learning trajectory (HLT) to Learning trajectory (LT) in formulating the rules of sines and cosines through PMRI (Pembelajaran Matematika Realistik Indonesia/Indonesian Realistic Mathematics Education) learning. The subjects were 38 students of class X1 SMAN 6 Prabumulih. The research design consist of three stages: preliminary design, design of experiments (pilot experiment and teaching experiment), and retrospective analysis. Data were collected through observation of learning activities, interviews, videos, and photos. The results showed that students use a triangle as the starting point in formulating rules of sines and cosines through PMRI learning. Change of Hypothetical Learning trajectory (HLT) to Learning trajectory (LT) occurs through the activity of students in exploring the triangles in PMRI learning.

PENDAHULUAN

Depdiknas (2006) melalui Permendiknas No. 22 tentang standar isi untuk satuan pendidikan dasar dan menengah menjelaskan bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika SMA diantaranya adalah agar siswa memiliki kemampuan dalam memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antar konsep, dan mengaplikasikan konsep atau algoritma secara luwes, akurat, efisien, dan tepat dalam pemecahan masalah. Hal ini sejalan dengan tujuan pembelajaran matematika

(NCTM, 2000), yaitu (1) komunikasi matematis, (2) penalaran matematis, (3) pemecahan masalah matematis, (4) koneksi matematis, dan (5) representasi matematis. Pembelajaran matematika diharapkan dapat membekali siswa dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, kreatif, dan kemampuan bekerjasama, serta dapat mengembangkan daya pikir siswa untuk menguasai dan menciptakan teknologi di masa depan. Selain itu siswa dapat menerapkannya dalam berbagai bidang kehidupan dan dapat

mengembangkannya pada tingkat pendidikan yang lebih tinggi.

Salah satu ruang lingkup mata pelajaran matematika di SMA meliputi trigonometri. Trigonometri yang dipelajari dan telah dikembangkan diantaranya perbandingan trigonometri dengan pendekatan konstruktivisme (Nizarwati, 2009); dan perbandingan trigonometri dengan pendekatan PMRI (Nurbaiti, 2011). Penulis tertarik mendesain salah satu submateri trigonometri, yaitu aturan sinus dan aturan cosinus dengan pendekatan PMRI di sekolah menengah atas.

Trigonometri merupakan salah satu materi yang dipelajari di kelas X SMA dengan kompetensi dasarnya adalah menggunakan perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas trigonometri dalam pemecahan masalah. Berdasarkan hal tersebut, siswa diharapkan dapat menyelesaikan setiap permasalahan yang berhubungan dengan trigonometri. Namun jika dilihat dari hasil pembelajaran matematika di Indonesia, termasuk pembelajaran trigonometri di SMA masih jauh dari memuaskan, bahkan bisa dikatakan masih mengecewakan. Hal ini dapat dilihat dari hasil ujian nasional dari tahun ke tahun, untuk matematika yang di dalamnya terdapat trigonometri termasuk dalam kategori “rendah” (Krismananto, 2008). Hal itu sejalan dengan yang dikemukakan Zulkardi (2011) bahwa perolehan Ujian Nasional pada level SMA diketahui masih rendah dan belum mengalami peningkatan yang berarti. Termasuk di dalamnya trigonometri, yang menjadi pokok bahasan yang sulit dikuasai siswa.

Salah satu usaha yang dapat dilakukan untuk meningkatkan kualitas pembelajaran khususnya trigonometri di SMA yaitu membelajarkan matematika dengan pendekatan Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI). Pembelajaran ini sejalan dengan tujuan pendidikan matematika dalam menempatkan penerapan konsep matematika sebagai aspek penting dalam pembelajaran

matematika. PMRI mengacu pada konsep Freudenthal dalam *Realistic Mathematics Education* (RME). Dua pandangan yang penting dari Freudenthal (Zulkardi, 2010) adalah (1) *mathematics must be connected to reality; and* (2) *mathematics as human activity*. Pertama, matematika seharusnya dekat dengan siswa dan berkaitan dengan kehidupan siswa sehari-hari. Kedua, ditekankan bahwa matematika sebagai aktivitas manusia sehingga siswa seharusnya diberikan kesempatan untuk melakukan aktivitas pembelajaran di setiap topik dalam matematika. Ide utama pendekatan matematika realistik adalah memberikan kesempatan untuk menemukan kembali (*reinvention*) ide dan konsep matematika melalui penjelajahan berbagai situasi dan persoalan dunia nyata (*real world*) dengan bimbingan orang dewasa dan secara bertahap berkembang menuju pemahaman matematika.

Berdasarkan hal tersebut, peneliti bermaksud melakukan penelitian tentang materi bidang trigonometri dengan judul “**Desain Pembelajaran Aturan Sinus dan Aturan Cosinus Berbasis PMRI**” sebagai salah satu upaya agar siswa lebih tertarik dan menyukai pelajaran matematika yang pada akhirnya akan berdampak pada prestasi belajar siswa menjadi lebih baik dan dapat meningkatkan kualitas pembelajaran matematika

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan aktivitas, prosedur, dan strategi serta perubahan dari *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) ke *Learning Trajectory* (LT) dalam merumuskan aturan sinus dan cosinus melalui pembelajaran PMRI.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode penelitian *design research* yang mendesain materi aturan sinus dan aturan cosinus dengan pendekatan PMRI menggunakan konteks segitiga untuk kelas X SMA. Proses pada desain penelitian ini adalah proses siklik (berulang). Proses siklik yaitu dari eksperimen pemikiran

kemudian ke eksperimen pembelajaran dalam bentuk diagram dan ilustrasi ide percobaan dari Gravemeijer dan Cobb (Akker, 2006) disajikan pada Gambar 1.

Dasar dari penelitian ini adalah proses siklus yang didesain berupa dugaan pembelajaran, tes, dan merevisi dugaan pembelajaran tersebut di kelas sehingga menghasilkan lintasan belajar. Dugaan tersebut dianalisis lalu didesain kembali dan direvisi kemudian diimplementasikan lagi. Subjek penelitian ini adalah 38 siswa Kelas XI SMA Negeri 6 Prabumulih yang secara rinci diuraikan sebagai berikut. Tahap *pilot experiment* melibatkan 6 siswa yang diklasifikasikan menjadi 3 kemampuan, yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Sedangkan tahap *teaching experiment* melibatkan sebanyak 38 siswa. Bagian dari *design research* adalah pengembangan teori antara proses pembelajaran dan mendukung pembelajaran. Tahapan penelitian itu diuraikan sebagai berikut.

1. Preliminary Design

Pada tahap ini, peneliti menuangkan ide awal yang dimulai dengan mempelajari berbagai kajian literatur tentang segitiga dan beberapa buku yang berhubungan dengan aturan sinus dan aturan cosinus. Kemudian peneliti

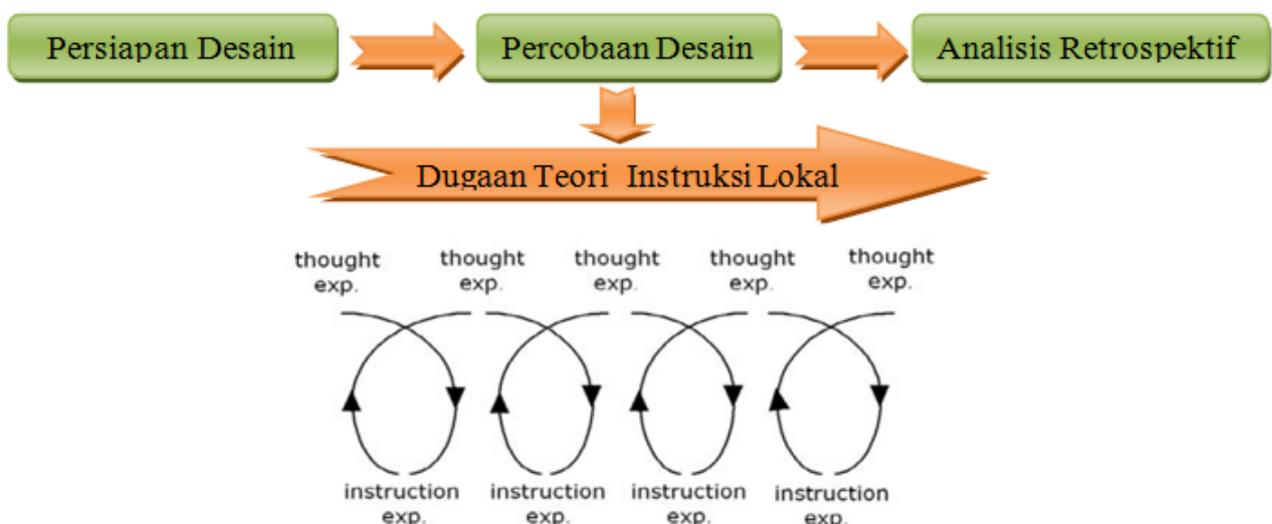
mendesain HLT yang memuat tujuan pembelajaran, aktivitas pembelajaran, dan dugaan cara berpikir siswa dari tahap informal ke tahap formal. Segitiga dijadikan *starting point* karena dekat dengan kehidupan sehari-hari siswa SMA.

2. Teaching Experiment

Pada tahap ini, HLT yang telah dibuat diujicobakan secara bertahap. Pertama, tahap *pilot experiment* dimana pada tahap ini peneliti sebagai guru dan guru model mengobservasi proses pembelajaran. Kedua, pada tahap *teaching experiment* dilakukan pada kelompok besar yang dilakukan oleh guru model. Revisi HLT yang menjadi *Learning Trajectory* (LT) dilaksanakan pada tahap ini sehingga pola pikir dan strategi siswa terlihat dengan menggunakan segitiga pada materi aturan sinus dan aturan cosinus.

3. Retrospective Analysis

Pada tahap *retrospective analysis*, peneliti melakukan refleksi terhadap pembelajaran yang telah dilakukan pada tahap *teaching experiment*. Pada tahap ini HLT yang telah didesain dibandingkan dengan proses pembelajaran siswa yang sebenarnya dan dari hal tersebut peneliti dapat menjawab rumusan masalah penelitian.



Gambar 1. Siklik *Design Research* (Gravemeijer, 2004)

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses pembelajaran yang berlangsung terdiri dari beberapa aktivitas. Sebelum dan sesudah aktivitas dilakukan tes awal dan tes akhir guna mengetahui kemampuan pemahaman konsep siswa. Adapun aktivitas yang dilakukan adalah sebagai berikut.

Aktivitas 1. Memperhatikan Gambar-Gambar Segitiga pada Lembar Aktivitas Siswa (Mendeskripsikan Segitiga)

Siswa mengeksplorasi pengetahuan awal dengan melihat gambar benda-benda berbentuk segitiga. Pada aktivitas 1 ini ada 2 kegiatan yaitu pada kegiatan pertama, mendeskripsikan bentuk segitiga dan menentukan unsur-unsur segitiga. Sedangkan pada aktivitas kedua, menentukan jenis-jenis segitiga dan mendeskripsikan pengertian dari masing-

masing segitiga tersebut. Siswa melakukan kegiatan ini secara berkelompok. Kemudian siswa berdiskusi, apakah terdapat perbedaan jawaban antara masing-masing kelompok? Selanjutnya salah satu kelompok mempresentasikan jawaban mereka.

Tujuan Pembelajaran

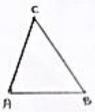
Siswa mampu mendeskripsikan bentuk dan jenis segitiga serta menentukan unsur-unsur pada segitiga.

Hasil Aktivitas

Hasil aktivitas siswa disajikan di Gambar 2. Dari gambar 2, terlihat bahwa siswa telah mengetahui tentang bangun datar segitiga, unsur-unsur pada segitiga, serta jenis-jenis segitiga berdasarkan panjang sisi dan besar sudutnya. Berdasarkan aktivitas ini dapat disimpulkan bahwa siswa dapat mengeksplorasi kemampuan dan pengetahuan mereka dalam mendeskripsikan segitiga.

3. Berdasarkan soal no. 2, tentukan manakah yang merupakan sisi, sudut, dan titik sudutnya?

Jawaban :



sisinya = AB, BC, dan AC
 sudutnya = $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$
 titiknya = A, B, C

4. Ada berapa jumlah sisi, sudut, dan titik sudutnya? Dan berapa besar jumlah ketiga sudutnya?

Jawaban :

sisinya = 3
 sudutnya = 3
 titiknya = 3
 besar jumlah ketiganya = 180°

5. Jadi apa yang dapat kamu simpulkan dari bangun tersebut?

Jawaban :

Segitiga memiliki sisi, sudut, dan titiknya 3 buah dan besar jumlah seluruhnya 180°

2. Berdasarkan soal no. 1, jelaskan dengan kata-katamu sendiri apa yang dimaksud dengan :

- a. Segitiga siku-siku
- b. Segitiga lancip
- c. Segitiga tumpul
- d. Segitiga sama sisi
- e. Segitiga sama kaki
- f. Segitiga sembarang

Jawaban :

- a) Segitiga siku-siku \rightarrow segitiga yang sudutnya 90°
- b) Segitiga lancip \rightarrow segitiga yang memiliki sudut kurang dari 90°
- c) Segitiga tumpul \rightarrow segitiga yang memiliki sudut lebih dari 90°
- d) Segitiga sama sisi \rightarrow segitiga yang memiliki 3 sisi sama
- e) Segitiga sama kaki \rightarrow segitiga yang hanya memiliki 2 sisi yg sama
- f) Segitiga sembarang \rightarrow segitiga yang semua sisinya tidak beraturan

3. Berdasarkan jawaban soal no. 1 dan 2 :

a. Jika ditinjau dari sudut-sudutnya, segitiga dapat dibedakan menjadi :

Jawaban :

Segitiga ditinjau dari sudutnya, dapat dibedakan menjadi :

- Segitiga siku-siku = 90°
- Segitiga lancip = kurang dari 90°
- Segitiga tumpul = lebih dari 90°

b. Jika ditinjau dari panjang sisinya, segitiga dapat dibedakan menjadi :

Jawaban :

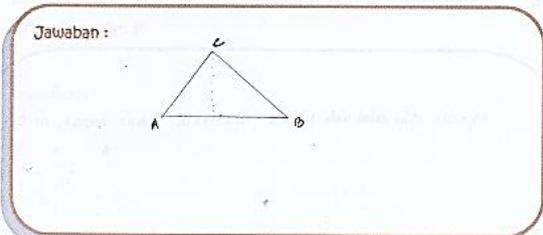
Segitiga ditinjau dari sisinya, dapat dibedakan menjadi :

- Segitiga sama sisi = memiliki 3 sisi yang sama
- Segitiga sama kaki = memiliki 2 sisi yang sama
- Segitiga sembarang = memiliki semua sisi yg tidak beraturan

Gambar 2. Hasil Kegiatan Siswa pada Aktivitas 1

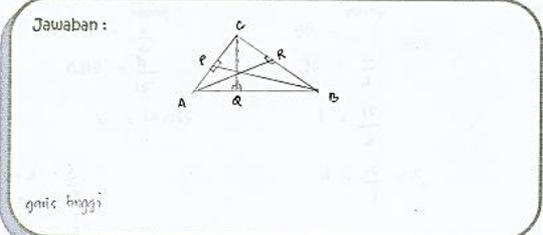
1. Gambarkanlah sebuah segitiga sembarang !!! Kemudian berilah nama segitiga tersebut !!!

Jawaban :



2. Dari segitiga yang telah kamu buat pada soal 1, lukiskanlah semua garis tinggi yang terdapat pada segitiga tersebut !!!

Jawaban :



3. Berdasarkan soal 2, apa yang kamu ketahui tentang garis tinggi pada segitiga?

Jawaban : garis tinggi pada segitiga
 b garis yang ditarik dari salah satu titik sudut yang tegak lurus pada garis di depan sudut.

1. Diketahui $\triangle ABC$ dengan $\angle A = 35^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, dan sisi $c = 15$.

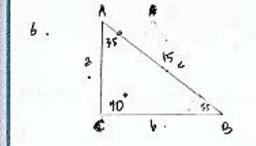
a. Apakah data itu cukup untuk dapat melukis sebuah segitiga? Jelaskan alasanmu!

b. Gambarkanlah segitiga tersebut!

c. Jika a , b , dan c masing-masing adalah sisi-sisi di depan sudut A , B , dan C , hitunglah a dan b !

Jawaban :

a. Bisa, karena sudah diketahui sudut dan salah satu sisinya



b.

$$= 180 - (30 + 35)$$

$$= 180 - 125$$

$$= 55^\circ$$

c. $\sin \angle B = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$

$$\sin 55 = \frac{b}{15}$$

$$0,819 = \frac{b}{15}$$

$$b = 12,285$$

$\sin \angle A = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$

$$\sin 35 = \frac{a}{15}$$

$$0,573 = \frac{a}{15}$$

$$a = 15 \times 0,573$$

$$a = 8,595$$

$\sin \angle C = \frac{\text{depan}}{\text{miring}}$

$$90 = \frac{c}{a}$$

$$1 = \frac{15}{a}$$

$$a = \frac{15}{1} = 15$$

Gambar 3. Hasil Kegiatan Siswa pada Aktivitas 2

Aktivitas 2. Menentukan Hubungan Ketiga Garis Tinggi pada Segitiga Sebarang

Siswa mengeksplorasi pengetahuan awalnya tentang berbagai macam garis yang terdapat pada segitiga, yaitu garis tinggi, garis berat, garis bagi, dan garis sumbu, sehingga siswa dapat menarik simpulan sendiri tentang definisi dari garis tersebut. Pada aktivitas kedua ini khusus mempelajari tentang garis tinggi segitiga. Kemudian siswa secara berkelompok membuat segitiga sebarang dan melukiskan semua garis tinggi yang terdapat pada segitiga tersebut. Siswa dapat mengungkapkan dengan kata-katanya sendiri definisi dari garis tinggi segitiga. Selanjutnya siswa menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan garis tinggi segitiga.

Tujuan Pembelajaran

Siswa mampu menentukan garis tinggi segitiga dan menentukan hubungan ketiga garis tinggi pada segitiga.

Hasil Aktivitas

Hasil aktivitas siswa disajikan di Gambar 3. Gambar 3 memperlihatkan hasil kerja siswa dalam menentukan garis tinggi segitiga dan menyelesaikan soal tentang garis tinggi segitiga.

Aktivitas 3. Merumuskan Aturan Sinus

Siswa secara berkelompok diminta untuk mengingat kembali tentang garis tinggi segitiga. Kemudian siswa diminta untuk merumuskan aturan sinus dengan menggunakan segitiga lancip dan segitiga tumpul. Siswa membandingkan hasil perhitungan dari kedua permasalahan tersebut. Selanjutnya salah satu perwakilan kelompok mempresentasikan hasil jawaban mereka di depan kelas.

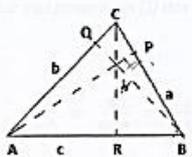
Tujuan Pembelajaran

Siswa mampu merumuskan aturan sinus berdasarkan hubungan ketiga garis tinggi pada segitiga.

Merumuskan Aturan Sinus

1. Untuk menurunkan aturan sinus, perhatikan ΔABC lancip pada gambar berikut !

2. Garis-garis AP, BQ, dan CR merupakan garis tinggi pada sisi a, sisi b, dan sisi c.



Perhatikan ΔACR :

$$\sin A = \frac{r}{b} \iff r = b \cdot \sin A \quad \text{.....(1)}$$

Perhatikan ΔBCR :

$$\sin B = \frac{r}{c} \iff r = c \cdot \sin B \quad \text{.....(2)}$$

Persamaan (1) dan (2), diperoleh :

$$b \cdot \sin A = c \cdot \sin B \iff \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin A} \quad \text{.....(3)}$$

Perhatikan ΔBAP :

$$\sin B = \frac{p}{c} \iff p = c \cdot \sin B \quad \text{.....(4)}$$

Perhatikan ΔCAP :

$$\sin C = \frac{p}{b} \iff p = b \cdot \sin C \quad \text{.....(5)}$$

Persamaan (4) dan (5), diperoleh :

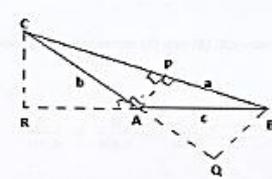
$$c \cdot \sin B = b \cdot \sin C \iff \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \quad \text{.....(6)}$$

Jadi dari persamaan (3) dan (6) diperoleh :

$$\frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin B} = \frac{a}{\sin C} \iff \text{Aturan Sinus atau Dalil Sinus}$$

3. Untuk menurunkan aturan sinus, dapat juga dengan menggunakan segitiga tumpul. Perhatikan ΔABC tumpul pada gambar berikut !

4. Garis-garis AP adalah garis tinggi pada sisi a, garis BQ dan CR adalah garis tinggi pada perpanjangan sisi b dan c.



Perhatikan ΔACR :

$$\sin \angle RAC = \frac{r}{b} \iff r = b \cdot \sin (180^\circ - A) \quad \text{.....(1)}$$

$$\iff r = b \cdot \sin A$$

Gambar 4. Hasil Rumusan Siswa dalam Menentukan Aturan Sinus

Hasil Aktivitas

Pada saat merumuskan aturan sinus, siswa harus memahami tentang garis tinggi segitiga dan perbandingan trigonometri sudut yang telah dipelajari pada pertemuan sebelumnya. Berikut adalah salah satu jawaban siswa dalam merumuskan aturan sinus seperti yang terlihat pada Gambar 4.

Aktivitas 4. Merumuskan Aturan Cosinus

Siswa secara berkelompok diminta untuk mengingat kembali tentang garis tinggi segitiga dan aturan sinus. Kemudian siswa diminta untuk merumuskan aturan cosinus dengan menggunakan segitiga lancip dan segitiga tumpul. Siswa membandingkan hasil perhitungan dari kedua permasalahan tersebut. Selanjutnya salah satu perwakilan kelompok mempresentasikan hasil jawaban mereka di depan kelas.

Tujuan Pembelajaran

Siswa mampu merumuskan aturan cosinus berdasarkan hubungan ketiga garis tinggi pada segitiga.

Hasil Aktivitas

Pada saat merumuskan aturan cosinus, siswa harus memahami tentang garis tinggi segitiga, perbandingan trigonometri sudut dan aturan sinus. Berikut adalah salah satu jawaban siswa dalam merumuskan aturan cosinus seperti yang terlihat pada Gambar 5.

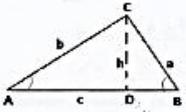
Aktivitas 5. Menggunakan Aturan Sinus dan Aturan Cosinus dalam Penyelesaian Soal

Pada Aktivitas 5 ini, siswa secara berkelompok berdiskusi tentang soal-soal yang berhubungan dengan aturan sinus dan aturan cosinus. Kemudian beberapa kelompok mempresentasikan salah satu jawaban mereka di depan kelas.

Menurunkan Aturan Cosinus

1. Untuk menurunkan aturan cosinus, perhatikan ΔABC lancip pada gambar berikut!

2. Garis $CD = h$ adalah garis tinggi pada sisi c .



3. Dengan menerapkan teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku BCD, diperoleh:

$$a^2 = h^2 + b^2 \quad \dots\dots (1)$$

pada segitiga siku-siku ACD, diperoleh:

$$h = b \sin A \quad \dots\dots (2)$$

dan

$$AD = b \cos A,$$

sehingga

$$BD = c - b \cos A \quad \dots\dots (3)$$

Substitusi $h = b \sin A$ dan $BD = c - b \cos A$ ke persamaan (1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} a^2 &= (h)^2 + (BD)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \dots\dots (4a) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan analisis perhitungan yang sama untuk ΔABC pada gambar (a) dan (b) berikut, diperoleh:

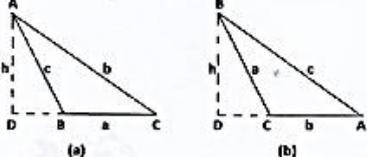
$$(b^2 \cos^2 A) + (c^2 - 2bc \cos A) + (b^2 \sin^2 A)$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A$$

Substitusi $h = b \sin A$ dan $BD = c - b \cos A$ ke persamaan (1), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} a^2 &= (h)^2 + (BD)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 \sin^2 A + c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \dots\dots (4a) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan analisis perhitungan yang sama untuk ΔABC pada gambar (a) dan (b) berikut, diperoleh:



(a) (b)

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \dots\dots (4b)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \dots\dots (4c)$$

Persamaan-persamaan (4a), (4b), dan (4c) dikenal sebagai aturan cosinus atau dalil cosinus.

Berdasarkan bukti-bukti tersebut, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

Pada segitiga ABC berlaku aturan cosinus yang dapat dinyatakan dengan persamaan

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Aturan Cosinus atau Dalil Cosinus

Gambar 5. Hasil Rumusan Siswa dalam Menentukan Aturan Cosinus

Tujuan Pembelajaran

Siswa mampu menggunakan aturan sinus dan aturan cosinus untuk menyelesaikan soal perhitungan sisi atau sudut pada segitiga.

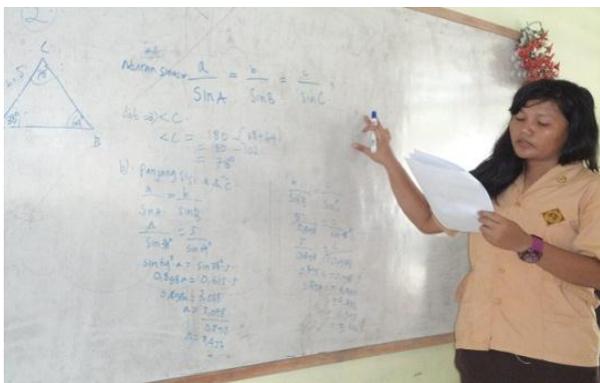
Hasil Aktivitas

Siswa secara berkelompok menyelesaikan permasalahan yang ada pada lembar aktivitas. Selain itu terlihat juga bahwa siswa menjawab beberapa soal pemecahan masalah yang merupakan aplikasi dari aturan sinus dan aturan cosinus (Gambar 6).



Gambar 6. Kegiatan Siswa

Kemudian siswa mempresentasikan hasil jawabannya di depan kelas. Disini siswa bersama-sama mendiskusikan hasil jawaban mereka dengan guru sebagai fasilitator. Gambar 7 memperlihatkan siswa sedang menuliskan dan mempresentasikan hasil diskusi kelompok mereka di depan kelas.



Gambar 7. Presentasi Siswa

PEMBAHASAN

Dari hasil *design research* yang telah dilakukan, diperoleh lintasan belajar aturan

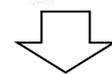
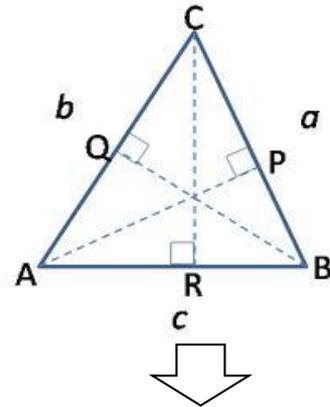
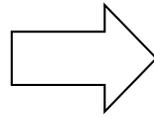
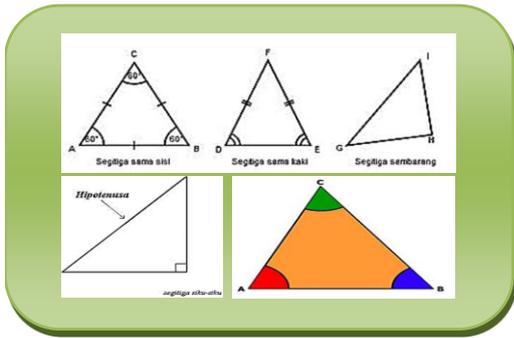
sinus dan aturan cosinus menggunakan segitiga dengan pendekatan PMRI dilakukan di kelas X SMA. Selain itu, diperoleh strategi-strategi pemikiran siswa dalam menyelesaikan materi aturan sinus dan aturan cosinus. Strategi tersebut merupakan dampak dari penerapan HLT yang telah didesain dan diujicobakan pada tahap *pilot experiment* kemudian direvisi sehingga dapat diterapkan pada *teaching experiment* yang menghasilkan LIT. Pembelajaran yang dilaksanakan menggunakan segitiga sebagai *starting point* untuk mengawali materi aturan sinus dan aturan cosinus. Kegiatan-kegiatan yang ada pada saat mendeskripsikan segitiga membuat pola pikir siswa lebih luas dalam menjangkau materi tersebut. Untuk mendukung proses pembelajaran tersebut, maka pendekatan PMRI berperan sangat besar dalam proses pembelajaran yang berlangsung lebih aktif dan efisien.

Aktivitas siswa lebih terlihat sesuai karakteristik PMRI. Karakteristik PMRI yang muncul dalam proses pembelajaran ini sejalan dengan aktivitas berpikir. Lima karakteristik pembelajaran matematika realistik menurut Gravemeijer (1994) adalah sebagai berikut.

1. Menggunakan Masalah Kontekstual

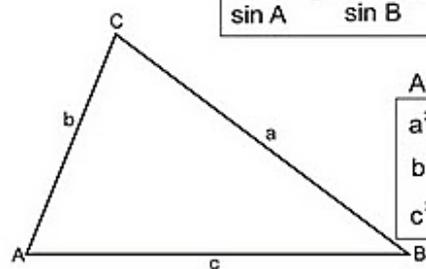
Masalah kontekstual sebagai aplikasi dan titik tolak dimana matematika yang diinginkan dapat muncul. Siswa mendeskripsikan segitiga, menentukan garis tinggi segitiga, merumuskan aturan sinus dan aturan cosinus, serta menggunakannya dalam penyelesaian soal.

Gambar 8 menjelaskan tentang proses dimana siswa mulai mendeskripsikan segitiga kemudian menentukan garis tinggi segitiga, merumuskan aturan sinus dan aturan cosinus serta menerapkannya dalam pemecahan masalah. Ini menjelaskan proses dari tahap informal ke tahap formal.



Aturan Sinus :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



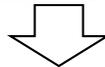
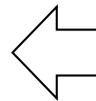
Aturan Cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$$

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c}$	$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c}$	$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2.a.b}$
--	--	--



2. Seorang tukangukur mengukur sebuah tanah. Titik tanah PQ dikukur panjangnya 500 m. Terletak busur R dikukur arah ketangkanya dari P dan dari Q, sedemikian $\angle RPQ = 45^\circ$ dan $\angle PQR = 75^\circ$. Hitunglah jarak terpendek busur R dari P dan dari Q !!

Jawaban :

$\angle RPQ = 180 - (\angle RPQ + \angle PQR)$
 $= 180 - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$

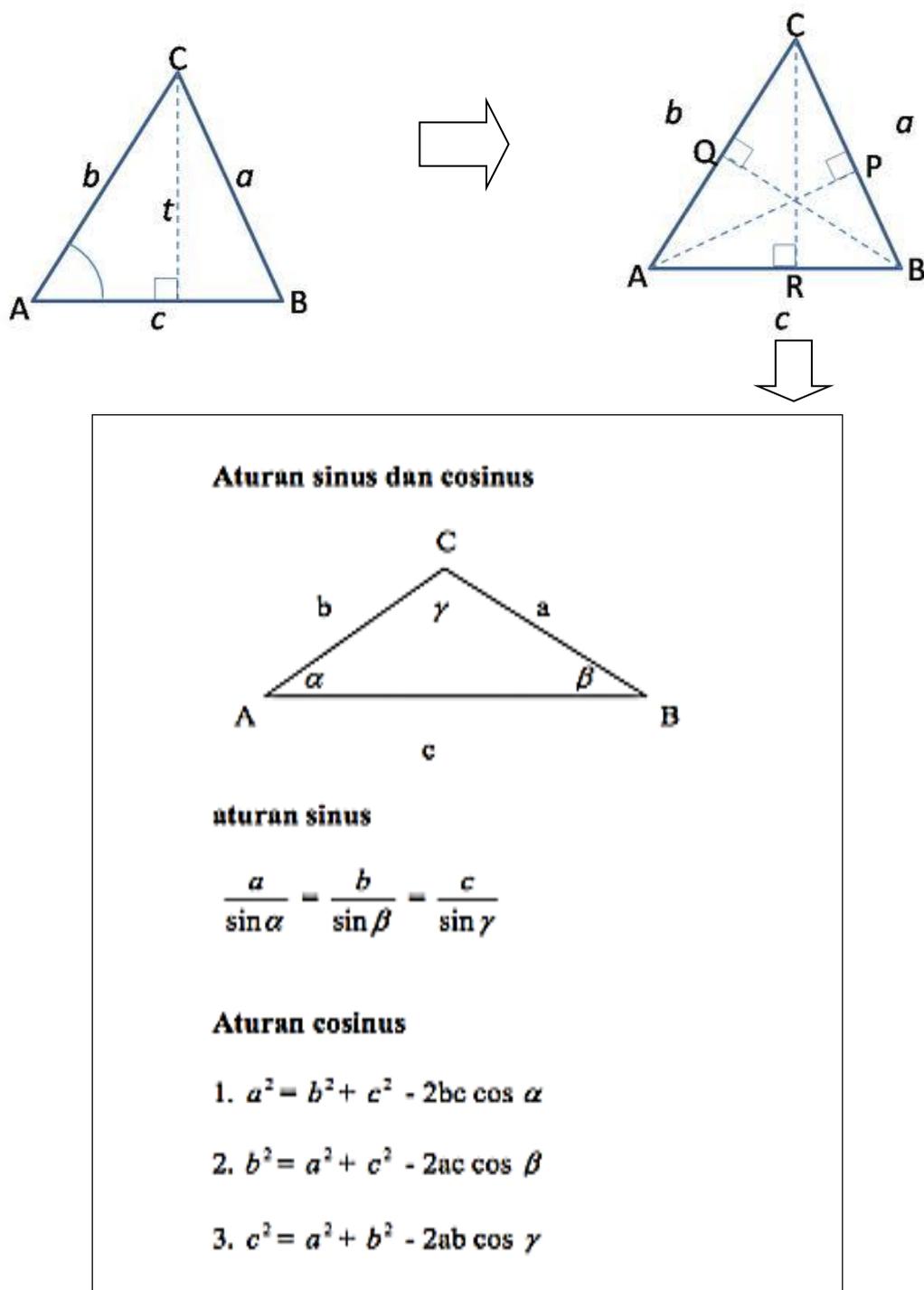
Untuk R dari P
 $\frac{P}{\sin P} = \frac{R}{\sin R} = \frac{Q}{\sin Q}$

$\frac{500}{\sin 60^\circ} = \frac{R}{\sin 45^\circ} = \frac{500}{\sin 75^\circ}$

$R = \frac{500 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}$
 $R = \frac{500 \cdot 0,707}{0,866}$
 $R = 403,47$

3. Dari gambar berikut, titik B terlihat pada kaki bukit. Dari B, puncak bukit P terlihat dengan sudut elevasi 37° . Titik C terlihat sama tinggi dengan B. Dari C, puncak bukit P terlihat dengan sudut elevasi 19° . Jarak $CA = 1500$ km. Hitunglah tinggi bukit tersebut !! (Skor maksimum : Cari jarak BP terlihat dahulu).

Gambar 8. Penggunaan Masalah Kontekstual



Gambar 9. Gambar Garis Tinggi, Rumusan Aturan Sinus dan Aturan Cosinus

2. Menggunakan Model atau Jembatan sebagai Instrumen Vertical

Perhatian diarahkan pada pengembangan model, skema, dan simbolisasi dari pada mentransfer rumus atau matematika formal secara langsung. Siswa mengembangkan garis tinggi segitiga menjadi rumusan aturan sinus dan aturan cosinus seperti yang terlihat pada Gambar 9.

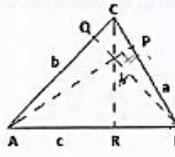
3. Menggunakan Kontribusi Siswa

Kontribusi yang besar dalam proses belajar mengajar diharapkan berasal dari kontribusi siswa sendiri yang mengarahkan mereka dari informal ke arah formal. Siswa merumuskan aturan sinus dan aturan cosinus berdasarkan garis tinggi pada segitiga seperti yang terlihat pada Gambar 10.

Merumuskan Aturan Sinus

1. Untuk menurunkan aturan sinus, perhatikan ΔABC lancip pada gambar berikut !

2. Garis-garis AP, BQ, dan CR merupakan garis tinggi pada sisi a, sisi b, dan sisi c.



Perhatikan ΔACR :

$$\sin A = \frac{CR}{AC} \iff CR = AC \cdot \sin A \quad \text{.....(1)}$$

Perhatikan ΔBCR :

$$\sin B = \frac{CR}{BC} \iff CR = BC \cdot \sin B \quad \text{.....(2)}$$

Persamaan (1) dan (2), diperoleh :

$$AC \cdot \sin A = BC \cdot \sin B \iff \frac{AC}{\sin A} = \frac{BC}{\sin B} \quad \text{.....(3)}$$

Perhatikan ΔBAP :

$$\sin B = \frac{AP}{AB} \iff AP = AB \cdot \sin B \quad \text{.....(4)}$$

Perhatikan ΔCAP :

$$\sin C = \frac{AP}{AC} \iff AP = AC \cdot \sin C \quad \text{.....(5)}$$

Persamaan (4) dan (5), diperoleh :

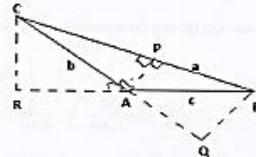
$$AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C \iff \frac{AB}{\sin B} = \frac{AC}{\sin C} \quad \text{.....(6)}$$

Jadi dari persamaan (3) dan (6) diperoleh :

$$\frac{AC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin B} = \frac{BC}{\sin C} \implies \text{Aturan Sinus atau Dalil Sinus}$$

3. Untuk menurunkan aturan sinus, dapat juga dengan menggunakan segitiga tumpul. Perhatikan ΔABC tumpul pada gambar berikut !

4. Garis-garis AP adalah garis tinggi pada sisi a, garis BQ dan CR adalah garis tinggi pada perpanjangan sisi b dan c.



Perhatikan ΔACR :

$$\sin \angle RAC = \frac{CR}{AC} \iff CR = AC \cdot \sin (180^\circ - A)$$

$$\iff CR = AC \cdot \sin A \quad \text{.....(1)}$$

Perhatikan ΔBCR :

$$\sin B = \frac{CR}{BC} \iff CR = BC \cdot \sin B \quad \text{.....(2)}$$

Persamaan (1) dan (2), diperoleh :

$$AC \cdot \sin A = BC \cdot \sin B \iff \frac{AC}{\sin A} = \frac{BC}{\sin B} \quad \text{.....(3)}$$

Perhatikan ΔBAP :

$$\sin B = \frac{AP}{AB} \iff AP = AB \cdot \sin B \quad \text{.....(4)}$$

Perhatikan ΔCAP :

$$\sin C = \frac{AP}{AC} \iff AP = AC \cdot \sin C \quad \text{.....(5)}$$

Persamaan (4) dan (5), diperoleh :

$$AB \cdot \sin B = AC \cdot \sin C \iff \frac{AB}{\sin B} = \frac{AC}{\sin C} \quad \text{.....(6)}$$

Jadi dari persamaan (3) dan (6) diperoleh :

$$\frac{AC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin B} = \frac{BC}{\sin C} \implies \text{Aturan Sinus atau Dalil Sinus}$$

Gambar 10. Strategi Siswa Merumuskan Aturan Sinus

4. Interaktivitas

Dalam pembelajaran perlu sekali melaksanakan interaksi, baik antara siswa dengan siswa maupun antara siswa dengan guru yang

berperan sebagai fasilitator. Siswa melakukan kegiatan merumuskan aturan sinus dan aturan cosinus, siswa mendiskusikan jawaban mereka dan mempresentasikan jawaban mereka

merupakan interaksi antar siswa. Interaksi dengan guru berupa pertanyaan yang datang dari siswa kepada guru maupun dari guru kepada siswa.

5. Terintegrasi dengan Topik Pembelajaran Lainnya

PMRI menempatkan keterkaitan (*inter-twiening*) antara konsep matematika sebagai hal penting yang harus dipertimbangkan dalam pembelajaran, karena pada dasarnya konsep-konsep matematika tidak bersifat parsial, banyak konsep matematika yang memiliki keterkaitan. Keterkaitan antara materi segitiga dengan materi aturan sinus dan aturan cosinus.

SIMPULAN DAN SARAN

Hasil penelitian menunjukkan bahwa siswa menggunakan segitiga sebagai *starting point* dalam merumuskan aturan sinus dan cosinus melalui PMRI. Perubahan dari *Hypothetical Learning Trajectory (HLT)* ke *Learning Trajectory (LT)* terjadi melalui aktivitas siswa dalam mengeksplorasi segitiga dalam pembelajaran dengan pendekatan PMRI.

DAFTAR PUSTAKA

- Akker, et al. 2006. *Education Design Research*. London: Routledge Taylor and Francis Group.
- Depdiknas. 2006. *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi Untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta: Depdiknas.
- Gravemeijer, K. 1994. *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: Technipress, Culemborg.

Ilma, R. 2011. Improving Mathematics Communication Ability of Students In Grade 2 Through PMRI Approach. Makalah disampaikan pada *International Seminar and The Fourth National Conference on Mathematics Education* pada tanggal 21-23 Juli 2011. Yogyakarta.

Krismanto, Al. 2008. *Pembelajaran Trigonometri SMA*. Yogyakarta: PPPPTK Matematika.

NCTM. 2000. *Principles and Standard for School Mathematics*. Reston: The National Council of Teacher of Mathematics, Inc.

Nizarwati. 2009. Pengembangan Perangkat Pembelajaran Berorientasi Konstruktivisme untuk Mengajarkan Konsep Perbandingan Trigonometri Siswa Kelas X SMA. *Jurnal Pendidikan Matematika*, Vol.3, No.2, Desember 2009, hlm. 57-72.

Nurbaiti. 2011. *Pengembangan Bahan Ajar Trigonometri Kelas X Menggunakan Pendekatan PMRI di SMAN 3 Palembang*. Tesis PPs UNSRI.

Zulkardi. 2010. *How to Design Mathematics Lesson based on the Realistic Approach?* Diakses tanggal 15 Desember 2012, pada <http://eprints.unsri.ac.id/692/1/rme.html>.

-----, 2011. Model Peningkatan Mutu Pendidikan SMA di Kota Prabumulih, Kabupaten Ogan Ilir, dan Kabupaten Ogan Komering Ilir. Paper Dipresentasikan pada *Seminar Nasional Hasil Penelitian di UNSRI Palembang* pada tanggal 2 Desember 2011, Palembang.