

DIFRAKSI GELOMBANG PADA SILINDER BESAR DENGAN MILD SLOPE EQUATION

Didik Purwantoro

Staf Pengajar Fakultas Teknik UNY

ABSTRACT

This research is aimed to know the process of wave diffraction around the large cylinder of offshore structure using finite element method. This model chosen because of some reasons, i.e the complication of offshore structure's shape which are caused difficulties to conduct physical model solving. The other excess of this numerical model is cheaper and easier than physical model conducted in the laboratorium.

The equation of wave diffraction can be formulated as Helmholtz equation. A second approach can be developed by Mild Slope Equation, which is assumed that the depth is constant. The Helmholtz equation was done using finite element method with linear triangle interpolation. With finite element method, the complicated domain area can be solved more easily and effectively.

The result shows that the use of finite element method is still adequate to solve Helmholtz equation for period 8, 9 and 10 second. For period of 8 second numerical error produce the wave height difference of 0,36 m. The numerical model is then easily edited to analyze another offshore structures.

Keywords : diffraction, cyllinder, finite element

PENDAHULUAN

Negara Indonesia sebagai negara maritim memiliki kekayaan berupa lautan yang sangat luas (80 %) melebihi luas daratan. Di dalam lautan yang dimiliki tersebut terdapat kekayaan alam berupa minyak. Untuk mengeskplorasi minyak membutuhkan struktur pendukung berupa struktur lepas pantai.

Salah satu aspek penting dalam perencanaan sebuah struktur lepas pantai adalah pembuatan model untuk

menganalisis penjarangan gelombang yang diperlukan untuk mengetahui gaya-gaya dinamik yang bekerja pada struktur. Pembuatan model ini dilakukan mengingat perilaku gelombang di sekitar bangunan pantai adalah suatu permasalahan yang kompleks.

Pembuatan model dapat dilakukan dengan menggunakan model fisik, model matematik, model analog maupun model hibrid. Salah satu

kelemahan model fisik adalah kemampuannya yang hanya sekali sesuai dengan bentuk bangunan pelabuhan, artinya satu model hanya untuk satu perencanaan. Untuk perencanaan pelabuhan yang berbeda maka harus dibuat model yang berbeda. Di samping itu, model fisik juga memerlukan tempat yang cukup luas dan mahal. Berbeda dengan model fisik, model matematik dengan elemen hingga mempunyai kelebihan di antaranya murah, pembuatan relatif singkat, mudah dikontrol dan diamati serta mampu menyesuaikan dengan bentuk bangunan yang tidak sederhana (Triatmaja, 2001).

Dengan mempertimbangkan luasnya lautan yang kita miliki, maka perlu disiapkan sebuah perangkat lunak atau program yang dapat digunakan untuk mensimulasikan proses penjalaran gelombang pada struktur. Dengan adanya program ini maka proses pembuatan model sebagai bagian dari perencanaan struktur akan lebih murah dan tidak perlu berulang-ulang membuat model fisik apabila diinginkan bentuk lain, tetapi tinggal merubah beberapa bagian dari program tersebut. Dalam penelitian ini akan dicoba bagaimana unjuk kerja persamaan Mild Slope Equation dengan metode elemen hingga di dalam menggambarkan proses difraksi gelombang di sekitar silinder.

KAJIAN PUSTAKA

Komputasi gaya gelombang adalah salah satu hal penting dalam desain

pada struktur lepas pantai. Bagian ini juga merupakan hal tersulit, sebab interaksi antara gelombang dengan struktur. Gaya gelombang pada struktur lepas pantai dapat didekati dengan 3 pendekatan, yaitu persamaan Morison, teori Froude-Krylov dan teori difraksi (Chakrabarti, 1987)

Model yang menggabungkan antara refraksi dan difraksi gelombang pertama kali dikenalkan oleh Berkhoff (1972) yang dikenal dengan Mild Slope Equation. Persamaan tersebut berbentuk eliptik yang terbatas penggunaannya untuk daerah pantai yang luas. Pendekatan lain telah dikembangkan oleh Radder yang mengenalkan pendekatan dengan parabolik yang jauh lebih efisien dalam komputasinya tetapi ada beberapa keterbatasan, misalnya untuk rentang terjadinya sudut gelombang diharuskan kecil (Nizam, 1992).

Pada kondisi khusus apabila luas permukaan struktur cukup signifikan dibanding dengan panjang gelombang maka gelombang yang dihamburkan atau didifraksikan juga akan sangat signifikan. Difraksi di sekitar silinder ini penting untuk dijadikan bahan pertimbangan dalam menghitung gaya-gaya yang bekerja pada struktur (Chakrabarti, 1986) Penyelesaian secara analitik untuk permasalahan difraksi pada silinder besar dapat dilakukan. Untuk gelombang pada laut dalam penyelesaian masalah ini telah dilakukan oleh Havelock (1940) dan

MacCamy dan Fuchs (1954) untuk gelombang transisi. Untuk penyelesaian ini asumsi umum bahwa aliran adalah irrotasional dan gesekan diabaikan tetap digunakan (Chakrabarti, 1986).

Teori gelombang dua dimensi dikembangkan dengan melakukan linierisasi persamaan gelombang yang kompleks. Berdasarkan Persamaan Laplace dan Bernoulli dengan memasukkan beberapa kondisi batas diperoleh persamaan gelombang linier. Bentuk persamaan Laplace untuk gelombang adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Teori gelombang linier dikembangkan dengan anggapan-anggapan sebagai berikut :

1. Air dianggap sebagai zat yang homogen, tidak memiliki kekentalan dan tak termampatkan.
2. Gerakan partikel air adalah "irrotasional". Tidak ada tegangan geser pada batas air-udara atau pada dasar laut.
3. Dasar laut adalah diam (tak bergerak), impermeabel dan horizontal.
4. Tekanan udara di permukaan air adalah konstan. Tekanan angin tidak diperhitungkan dan perbedaan tekanan hidrostatis karena perbedaan elevasi diabaikan.
5. Amplitudo gelombang adalah kecil dibandingkan dengan panjang gelombang dan kedalaman.

PERSAMAAN BERNOULLI

Bentuk persamaan gerak untuk

fluida ideal (tidak mempunyai kekentalan) adalah persamaan Euler. Hukum Newton II dinyatakan dengan $F = m.a$, untuk arah sumbu X persamaan gerak fluida dinyatakan dengan :

$$P_x dy dz - (P_x + \frac{\partial P}{\partial x} dx) dy dz = m.a \quad (2)$$

apabila $m = \rho \cdot \text{volume} = \rho \cdot dx dy dz$ dan

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

maka persamaan gerak untuk arah sumbu X menjadi :

$$P_x dy dz - (P_x + \frac{\partial P}{\partial x} dx) dy dz$$

$$= \rho dx dy dz (\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z})$$

Persamaan tersebut selanjutnya dapat disederhanakan menjadi :

$$(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

untuk ke arah sumbu Y dan Z masing-masing dapat dinyatakan sebagai :

$$(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g$$

Persamaan tersebut adalah persamaan Euler. Untuk aliran dua dimensi (hanya ke arah sumbu X dan Z) dan apabila kecepatan ke arah

sumbu X (u) dan ke arah sumbu Z (w) dapat dinyatakan sebagai :
dinyatakan dalam bentuk :

$$u = -\frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \text{ sehingga}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

maka dihasilkan persamaan berbentuk :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial z}\right) + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g \text{ atau}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial u^2/2}{\partial z}\right) + \frac{\partial w^2/2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2}\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} - g$$

Apabila diintegrasikan sepanjang kedalaman maka akan dihasilkan persamaan :

$$\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2}\right) + \frac{P}{\rho} + gz = C(t) \quad (3)$$

Persamaan di atas disebut dengan persamaan Bernoulli.

KONDISI BATAS

Persamaan Laplace adalah persamaan diferensial tipe eliptik. Dalam proses penyelesaiannya membutuhkan kondisi batas di sekeliling ranah hitungnya. Beberapa kondisi batas tersebut adalah:

1. Kondisi batas dasar

Dasar perairan dianggap tidak porous, maka kecepatan partikel air normal dianggap sama dengan nol. Secara matematis pernyataan tersebut

$$w = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \text{ pada } z = -h.$$

Untuk dasar miring dengan kemiringan dh/dx dinyatakan dengan :

$$\frac{w}{u} = -\frac{\partial h}{\partial x} \text{ sehingga } w = -u\frac{\partial h}{\partial x}$$

2. Kondisi batas permukaan

Untuk kondisi batas atas ada dua macam, yaitu kondisi batas kinematik yang merupakan kondisi batas yang bebas berubah dengan anggapan bahwa fluktuasi permukaan hanya diakibatkan oleh perubahan kecepatan partikel pada permukaan tersebut. Secara matematik kondisi batas kinematik dinyatakan dengan :

$$w = \frac{\partial\eta}{\partial t} + u\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

Kondisi batas permukaan yang lain adalah kondisi batas dinamik yang diperlukan untuk anggapan bahwa pada permukaan tersebut tekanannya sama dengan tekanan atmosfer pada permukaan air. Masing – masing kondisi batas tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\left(-\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) + \left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{2}\right) + \frac{P}{\rho} + gz = C(t)$$

Pada teori gelombang linier, amplitudo gelombang dianggap kecil dibandingkan dengan kedalaman.

Dengan asumsi amplitudo kecil dan linier (notasi yang lebih dari orde satu diabaikan), maka kondisi batas permukaan menjadi :

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Dari persamaan Laplace dan persamaan kondisi batas ini diperoleh beberapa persamaan turunan untuk gelombang linier diantaranya adalah persamaan dispersi :

$$\sigma^2 = gk \tanh kh$$

dengan σ adalah $2\pi / T$, g adalah percepatan gravitasi (m/s^2), k adalah

wave number yaitu $2\pi/L$ dan h adalah kedalaman (m). Kecepatan penjalaran gelombang adalah :

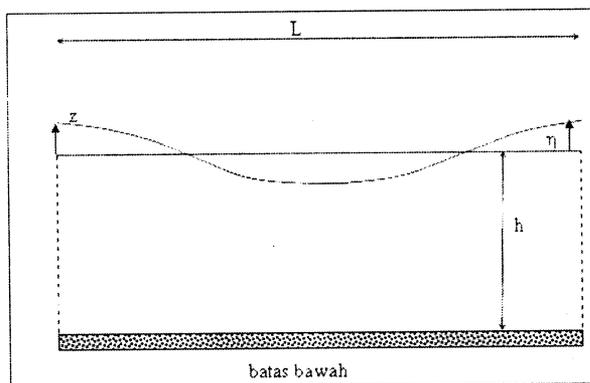
$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh$$

dan panjang gelombang dinyatakan dengan persamaan berikut :

$$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h}{L}$$

dengan L adalah panjang gelombang (m), T adalah periode (s) dan h adalah kedalaman (m).

Sketsa gelombang air dapat digambarkan berikut :



Gambar 1. Sketsa gelombang air

DIFRAKSI GELOMBANG

Di teknik pantai persamaan pengatur yang lazim untuk model gelombang permukaan adalah mild slope equation oleh Berkhoff (1972). Ada beberapa model matematik untuk gelombang yang berbasis pada mild slope equation, sebab persamaan ini sesuai untuk laut dalam maupun laut dangkal. Bentuk persamaan dari mild slope equation adalah eliptik yaitu :

$$\nabla^2(c c_g \nabla \eta) + k^2 c c_g \eta = 0 \quad (4)$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + k^2 c c_g \eta = 0$$

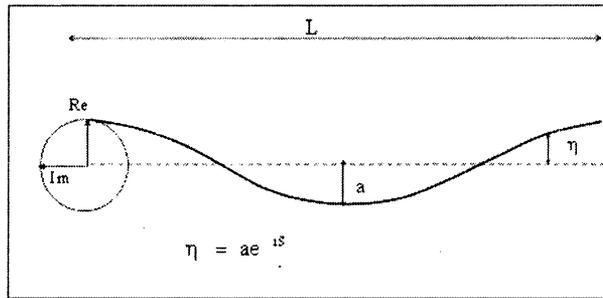
dengan $\eta = a e^{iS}$ atau $\eta = i \frac{\omega}{g} \phi e^{-i\omega t}$

dan

$$a = \frac{gH}{2\sigma}, \quad S = kx \cos \theta + ky \sin \theta,$$

$i = \sqrt{-1}$ dan k adalah wave number, t adalah periode gelombang, c adalah kecepatan rambat gelombang dan c_g

adalah kecepatan rambat group untuk gelombang dapat digambarkan gelombang. Secara grafis persamaan sebagai berikut:



Gambar 2. Sketsa gelombang air dengan bilangan kompleks

Dengan menggunakan metode Galerkin, persamaan untuk *Mild Slope Equation* dikalikan dengan fungsi pembobot. Bentuk persamaan baru yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\iint_{\Omega} W_j \left[\frac{\partial}{\partial x} (c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y}) + k^2 c c_g \eta \right] d\Omega = 0$$

dengan teori integral bagian Green diperoleh persamaan berikut :

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial W_j}{\partial x} c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial W_j}{\partial y} c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) d\Omega + \\ & \int_{\Gamma} \left(W_j c c_g \frac{\partial \eta}{\partial x} + W_j c c_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) d\Gamma + \\ & \iint_{\Omega} W_j k^2 \eta d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Suku ke 1 dan ke 3 adalah untuk matrik kekakuan sedangkan suku ke 2 adalah untuk kondisi batas. Gabungan suku ke-1 dan ke-3 selanjutnya digunakan sebagai matrik kekakuan elemen (K). Integral untuk setiap elemen dapat ditulis sebagai

$$\iint_{(e)} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy = \frac{1}{4 \Delta} (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j)$$

dengan

$$\begin{aligned} \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \\ \beta_j &= y_k - y_i \\ \gamma_j &= x_i - x_k \\ \beta_k &= y_i - y_j \\ \gamma_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

dan

$$\iint_{(e)} N_i N_j dx dy = \begin{cases} = \frac{1}{6} \Delta & \text{jika } i = j \\ = \frac{1}{12} \Delta & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

Kondisi batas untuk ranah hitungan terdiri dari kondisi batas luar berupa lingkaran dan kondisi batas dalam berupa bangunan pantai atau berupa pulau. Pada kondisi batas dalam persamaannya dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = ik \alpha \eta$$

dengan

$$\alpha = \frac{1 - kr}{1 + kr}$$

Apabila gelombang yang terjadi adalah gabungan antara gelombang insiden dan gelombang refleksi maka:

$$\eta = \eta_i + \eta_r$$

di daerah batas persamaan gelombang refleksi adalah :

$$\frac{\partial \eta_r}{\partial n} = -i k \alpha \eta_r$$

Gelombang yang terjadi persamaannya menjadi :

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\partial \eta_i}{\partial n} + \frac{\partial \eta_r}{\partial n} \quad (3.4.12)$$

Substitusi persamaan (3.4.12) ke dalam persamaan (3.4.11) menghasilkan bentuk persamaan baru sebagai berikut

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = i k \eta_i + \frac{\partial (\eta - \eta_i)}{\partial n} \quad (3.4.13)$$

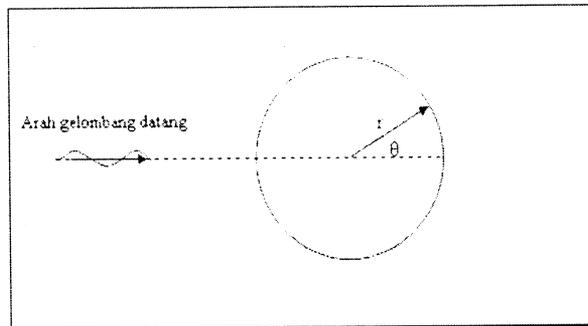
sehingga persamaan (3.4.11) bentuknya menjadi :

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = i k \eta_i - i k (\eta - \eta_i) \quad (3.4.14)$$

Atau dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = i k (2 \eta_i - \eta)$$

Untuk difraksi gelombang pada silinder besar dapat diselesaikan secara analitik. Penyelesaian secara analitik untuk laut dalam telah diselesaikan oleh Havelock (1940) dan oleh MacCamy dan Fuchs (1954) untuk laut transisi (Chakrabarti, S.K, 1986).



Gambar 3. Sketsa gelombang air melalui silinder besar

Bentuk penyelesaian untuk potensial kecepatan adalah :

$$\varphi = i \frac{gH \cosh ks}{2 \omega \cosh kd} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \delta_m i^m J_m(kr) + \\ A_m H_m^{(1)}(kr) \end{array} \right\} \cos m \theta e^{-i \omega t}$$

Untuk profil muka air gelombang dapat dirumuskan sebagai berikut

$$\eta = \frac{H}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m i^{m+1} \left[J_m(kr) - \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(kr) \right] \cos m \theta e^{-i \omega t}$$

dengan

H = tinggi gelombang

a = jarak titik dari pusat silinder

$\delta = 1$ untuk order 0 dan 2 untuk order lebih dari 1

k = angka gelombang

r = jari-jari silinder

J_m = fungsi Bessel bentuk pertama order m

H_m = fungsi Hankel bentuk pertama order m

METODE PENELITIAN

Objek Penelitian

Objek pada penelitian ini adalah model silinder besar yang dibuat dengan Fastabs.

Data Penelitian

Data pada penelitian ini meliputi data geometri domain model. Data geometri domain model meliputi bentuk silinder dan batas laut terbuka berbentuk lingkaran. Data geometri domain dibuat dengan program Fastabs. Bentuk struktur lepas pantai dibuat sederhana seperti gambar 4. Bentuk geometri domain dibagi menjadi elemen-elemen kecil berbentuk segitiga dengan ukuran 10 node tiap panjang gelombang. Model uji terdiri dari 4803 elemen dan 2534 titik dan kedalaman laut 100 m dengan batas tepi lingkaran. Gelombang yang terjadi diambil dari arah sebelah kiri, kemudian

terhamburkan akibat benturan dengan silinder. Diameter silinder dipakai 120 m dengan periode gelombang masing-masing 8,9,10,11 dan 12 detik.

LANGKAH PENGUJIAN

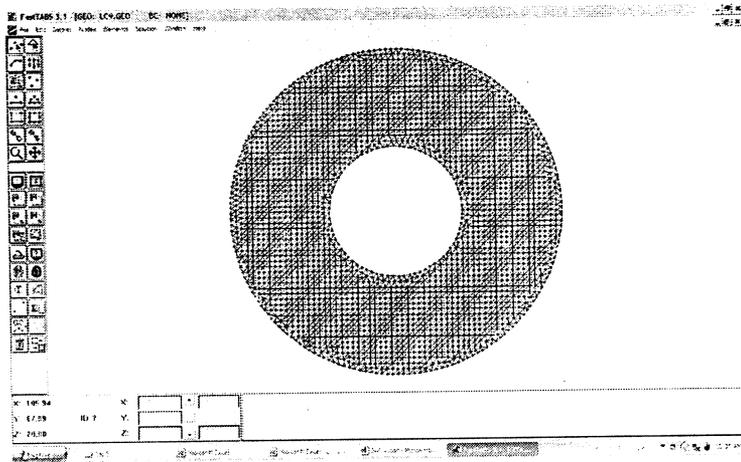
1. Persiapan

Langkah pertama untuk persiapan dalam penelitian ini adalah menyusun model matematik metode elemen hingga. Metode elemen hingga yang digunakan adalah metode Bubnov-Galerkin yaitu dengan mengalikan persamaan diferensialnya yaitu mild slope equation dengan fungsi pembobot berupa fungsi dasar elemen segitiga dengan interpolasi linier. Setelah itu menyusun matrik kekakuan elemen lokal dengan mengambil contoh satu elemen. Proses ini dilakukan secara manual.

2. Penyusunan Program

Setelah diperoleh angka kekakuan matrik lokal selanjutnya disusun program secara keseluruhan meliputi:

- a. Pembuatan jaring elemen dengan fastabs
- b. Penyusunan program utama dengan WATCOM Fortran.



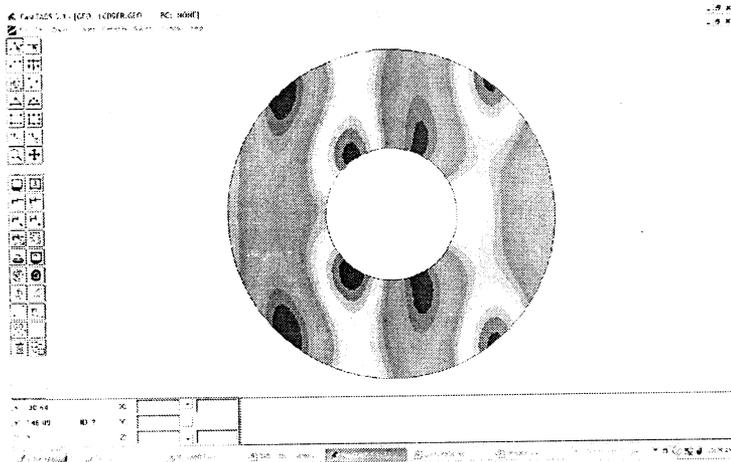
Gambar4. Model Silinder Besar .

3. Analisis Hasil Program

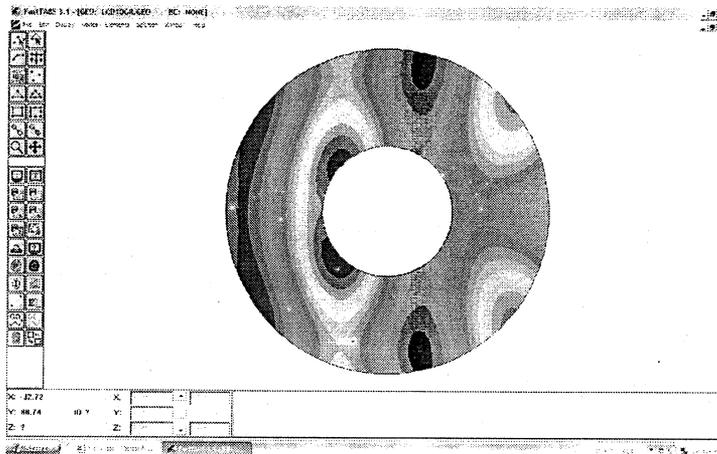
Hasil program nantinya adalah berupa data tinggi gelombang pada tiap node elemen dalam program fasttabs. Setelah dilihat hasilnya maka titik di sekitar silinder nilainya diambil dan dibandingkan dengan penyelesaian secara analitik.

Hasil pengujian model dengan periode gelombang 9 detik dan sudut fase 330o dan periode 10 detik dan sudut fase selanjutnya dapat dilihat sebagai berikut :

Hasil dan Pembahasan

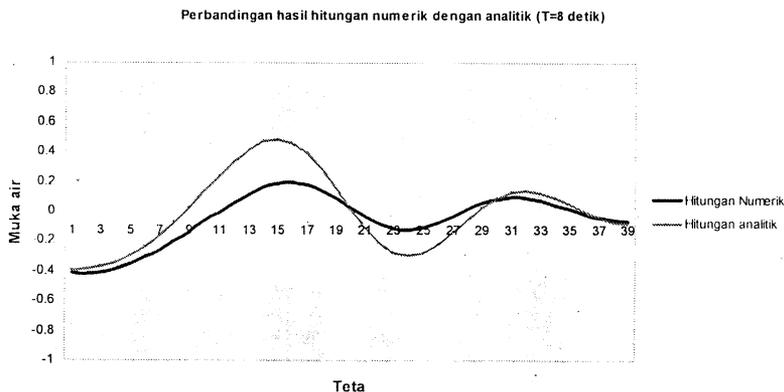


Gambar 5. Hasil Uji model Silinder Besar pada Periode Gelombang 9 detik



Gambar 6. Hasil Uji Model silinder Besar pada Periode Gelombang 10 detik

Hasil uji model selanjutnya diambil tinggi gelombang 8 detik pada silinder muka air sekeliling silinder dan hasilnya dibandingkan dengan penyelesaian analitik. Profil muka air untuk periode



Gambar 7. Profil muka air hasil hitungan numerik dengan hitungan analitik

Dari gambar 7 dapat dilihat bahwa hasil periode 9 dan 10 detik dapat dilihat numerik berbeda dengan penyelesaian sebagai berikut secara analitik. Secara lengkap untuk

DAFTAR PUSTAKA

- Chakrabarti, S.K,1986, "*Hydrodynamic of Offshore Structures*" Computational Mechanics Publications, Southanmpton Boston
- Dean,R.G. and Dalyymples, R.A, 1991, "*Water Wave Mechanics for Engineers and Scientist*", Advanced Series on Ocean Engineering World Scientist, New Jersey.
- Ippen,A.T.,1966,"*Estuary and Coastline Hydrodynamics*",McGraw-Hill, New York.
- Mei,C.C., 1994,"*The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*", Word Scientific Publishing Co. Singapore.
- Nizam, 1992, "*Combined Refraction-Diffraction Modeling*", Forum Teknik Sipil UGM, No.1/2, page 84-91,Yogyakarta.
- Triatmaja,R.(2001),*Bahan Kuliah Model Matematik*, Yogyakarta.
- Triatmodjo,B (1996), *Pelabuhan*, Beta Offset ,Yogyakarta.
- Triatmodjo,B (1999),*Teknik Pantai*, Beta Offset yogyakarta.
- Zienkiewics, O.C.,and Morgan, K., 1983,"*Finite Element and Approximation*", John Wiley & Sons, Singapore.
- Zienkiewics, O.C.,and Lewis,R.W., and Stagg,K.G.,1978 ,"*Numerical Methods in Offshore Engineering* ". John Wiley & Sons, Singapore.

- 1. **Artikel** dalam melalu
- 2. **Penuli** jenis h halaman
- 3. **Judul**
- 4. **Nama** tempa
- 5. **Abstr** Bahasa hasil.
- 6. **Kata** abstr
- 7. **Siste**
 - (a) B
 - (b) B
 - w
 - a
 - m
 - p
 - F
 - (c) E
 - p
- 8. **Daf**
 - (a) f
 - (b)
 - (c)
 - (d)
 - (e)
 - (f)
- 9. **Pe** dik
- 10. **An** Ja