



Spektrum Laplace Graf Mahkota dan Graf Benteng

Triyani*, Resa Oktriyansa, Siti Rahmah Nurshiami

Jurusan Matematika, Universitas Jenderal Soedirman, Purwokerto, Indonesia

* Corresponding Author. E-mail: triyani@unsoed.ac.id

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 17-May. 2023

Revised: 7-May. 2024

Accepted: 20-May. 2024

Keywords:

Graf mahkota, graf benteng, polinomial karakteristik, matriks laplace, spektrum laplace.

ABSTRACT

Spektrum dari suatu graf adalah susunan nilai eigen dari matriks ketetanggaan graf beserta multiplisitasnya. Spektrum graf yang dihasilkan dari matriks Laplace disebut spektrum Laplace. Matriks Laplace dari graf diperoleh dari selisih matriks ketetanggaan graf dengan matriks diagonal dimana elemen-elemen diagonal utamanya merupakan derajat simpul dari graf. Penelitian ini mengkaji bentuk spektrum Laplace dari graf Mahkota dan graf Benteng. Graf Mahkota (S_n^0) adalah graf yang diperoleh dari komplemen hasil perkalian kartesian graf Lengkap K_2 dan graf Lengkap K_n . Sementara itu graf Benteng B_{nn} adalah graf yang diperoleh dari hasil perkalian kartesian dua buah graf Lengkap K_n . Hasil penelitian telah diperoleh polinomial karakteristik dari matriks Laplace untuk graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$ dan graf Benteng B_{nn} dengan $n \geq 2$. Lebih lanjut spektrum Laplace dari kedua graf juga telah diperoleh.

The spectrum on a graph is a set of eigenvalues of the adjacency matrix along with their multiplicities. The spectrum of a Laplace matrix is called the Laplace spectrum. The Laplace matrix of a graph is obtained from the difference between a adjacency matrix and a diagonal matrix where the elements of main diagonal are the vertices degree of the graph. This research studied the Laplace spectrum on the crown graph and the rook graph. A crown graph (S_n^0) is a graph obtained from the complement of the cartesian product of complete graph K_2 and K_n . Meanwhile, rook graph (B_{nn}) is a graph obtained from the cartesian product of two complete graph K_n . The results of study are formula of the characteristic polynomial of Laplace matrix for the crown graph (S_n^0) with $n \geq 3$, and the rook graph (B_{nn}) with $n \geq 2$. Furthermore, the Laplace spectrum of both graphs has also been obtained.



This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/) license



How to Cite:

Triyani, T., Oktriyansa, R., & Nurshiami, S. R. (2024). Spektrum Laplace pada graf mahkota dan graf benteng. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 19(1), 27-36. <https://doi.org/10.21831/pythagoras.v19i1.60818>

<https://doi.org/10.21831/pythagoras.v19i1.60818>

PENDAHULUAN

Graf G dinotasikan dengan $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan simpul (*vertices*) tak kosong V dan himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang simpul (Munir, 2005). Berdasarkan definisi ini, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi, dan minimal mempunyai sebuah simpul. Graf yang hanya mempunyai sebuah simpul disebut graf trivial. Sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan sebagai pasangan tak terurut (u, v) dan dinotasikan dengan $e = (u, v)$ (Aldous et al., 2004). Simpul u dan v dikatakan bertetangga jika terdapat sebuah sisi yang menghubungkan simpul u ke simpul v dan sisi $e = (u, v)$ insiden dengan simpul u dan simpul v . Derajat dari simpul v dinotasikan dengan $\deg(v)$ adalah banyaknya sisi yang insiden dengan simpul v .

Graf dapat direpresentasikan ke dalam matriks, diantaranya adalah matriks ketetanggaan, matriks sirkulan, dan matriks Laplace (Runtuwuwu, 2021). Matriks Laplace dari graf dengan n simpul adalah matriks berukuran $n \times n$ yang diperoleh dari selisih matriks ketetanggaan graf dengan matriks diagonal dimana elemen-elemen diagonal utamanya merupakan derajat simpul dari graf (Fiedler, 1973). Matriks Laplace dikenal juga sebagai matriks Kirchhoff (Arumugam et al., 2016). Matriks Laplace merupakan matriks singular, simetri dan semi definit positif.

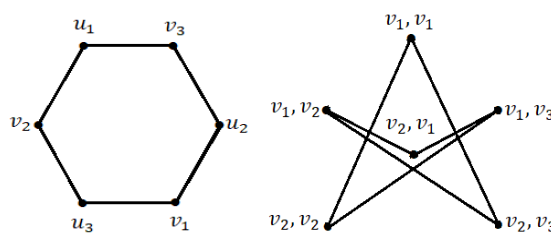
Jika $\lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ merupakan nilai eigen dari matriks Laplace, maka $\lambda_0 = 0$, dan $[1,1,\dots,1]^T$ merupakan vektor eigen yang berpadanan dengan nilai eigen λ_0 . Nilai eigen $\lambda_0 = 0$ merupakan nilai eigen terkecil dari matriks Laplace. Nilai eigen kedua dikenal sebagai *algebraic connectivity* dari graf (Fiedler, 1973). Nilai eigen dari suatu matriks Laplace diperoleh dengan menyelesaikan akar-akar karakteristik dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - L)$ dengan L merupakan matriks Laplace berukuran $n \times n$. Penelitian yang telah dilakukan terkait dengan nilai eigen dari matriks Laplace diantaranya adalah batas atas nilai eigen terbesar matriks Laplace pada graf Bipartit (Pan, 2002), batas atas dari jumlah nilai eigen matriks Laplace (Du & Zhou, 2012), dan energi dari matriks Laplace (Das et al., 2014).

Susunan nilai eigen dari matriks Laplace pada graf G beserta multiplisitasnya disebut spektrum Laplace. Definisi ini merupakan perluasan dari spektrum graf yang diperoleh dari matriks ketetanggaan graf (Biggs, 1993). Jika nilai eigen berbeda dari matriks Laplace adalah $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{s-1}$ dengan multiplisitas $m(\lambda_0), m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_{s-1})$, maka spektrum Laplace dari graf G dapat ditulis sebagai

$$Spec_L G = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ m(\lambda_0) & m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_{s-1}) \end{array} \right].$$

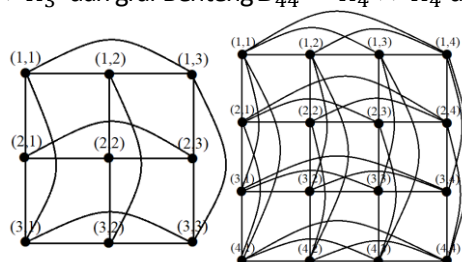
Spektrum suatu graf memiliki berbagai aplikasi dalam bidang fisika, teknik kelistrikan, dan ilmu komputer. Insani et al. (2012) telah mengkaji spektrum graf untuk analisis jejaring sosial dengan menggunakan *Microsoft Nodexl*. Orden et al. (2017) telah mengkaji pewarnaan spektrum graf untuk penetapan saluran Wi-Fi. Secara teori beberapa peneliti juga telah mengkaji spektrum Laplace. Das (2004) telah mengkaji sifat sifat spektrum Laplace dari graf. Sementara itu kajian tentang bentuk spektrum Laplace dari beberapa jenis graf juga mulai dilakukan. Deng et al. (2013) mengkaji spektrum Laplace graf reguler; Selvia et al. (2019) mengkaji spektrum Laplace dan spektrum ketetanggaan dari graf Bintang dan graf Lengkap; Yahya et al. (2020) mengkaji spektrum Laplace graf Torus serta Amaliyanah et al. (2022) telah mengkaji spektrum Laplace pada graf Kincir angin berarah.

Penelitian ini, bertujuan mengkaji spektrum Laplace dari graf hasil perkalian kartesian dua graf. Hasil kali kartesian dari graf G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G = G_1 \times G_2$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan himpunan sisinya adalah pasangan terurut dari dua titik di $V(G)$ yaitu $((u_1, u_2), (v_1, v_2))$ jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan u_2v_2 merupakan sisi di graf G_2 atau $u_2 = v_2$ dan u_1v_1 merupakan sisi di graf G_1 . Graf Mahkota S_n^0 merupakan graf yang diperoleh dari hasil komplemen perkalian kartesian graf Lengkap K_2 dan graf Lengkap K_n . Sementara itu, graf Benteng B_{nm} diperoleh dari hasil perkalian kartesian graf Lengkap K_n dan graf Lengkap K_n . Sebagai contoh graf pada Gambar 1 merupakan graf Mahkota S_3^0 , yaitu graf komplemen dari $K_2 \times K_3$.



Gambar 1. $S_3^0 \cong (K_2 \times K_3)^c$

Sedangkan graf Benteng $B_{33} = K_3 \times K_3$ dan graf Benteng $B_{44} = K_4 \times K_4$ dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf Benteng B_{33} dan B_{44}

METODE

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literatur. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menkonstruksi bentuk graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$;
2. Mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$;
3. Mendefinisikan elemen baris ke i kolom ke j dari matriks ketetanggaan graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$;
4. Mendefinisikan elemen baris ke i kolom ke j dari matriks diagonal graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$;
5. Mendefinisikan elemen baris ke i kolom ke j dari matriks Laplace graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$;
6. Merumuskan bentuk polinomial karakteristik dari matriks Laplace graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$;
7. Menentukan nilai eigen dari matriks Laplace graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$;
8. Menentukan spektrum Laplace graf mahkota (S_n^0) dengan $n \geq 3$;
9. Ulangi Langkah 1 sampai dengan 8, untuk graf Benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$.

HASIL PENELITIAN

Hasil penelitian pada artikel ini telah diperoleh polinomial karakteristik dari matriks Laplace graf Mahkota S_n^0 untuk $n \geq 3$ dan graf Benteng B_{nn} untuk $n \geq 2$, yaitu $p(\lambda) = \lambda(\lambda - (2n - 2))(\lambda - (n - 2))^{n-1}(\lambda - n)^{n-1}$ merupakan polinomial karakteristik dari matriks Laplace graf Mahkota S_n^0 , $n \geq 3$ dan $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)^{(n-1)^2}(\lambda - n)^{2(n-1)}$ merupakan polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng B_{nn} , $n \geq 2$. Lebih lanjut telah diperoleh spektrum Laplace dari ke dua graf tersebut, yaitu Spektrum Laplace dari graf mahkota (S_n^0) dengan $n \geq 3$ adalah

$$\text{spec}_L(S_n^0) = \begin{bmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

dan spektrum Laplace dari graf benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$ adalah

$$\text{spec}_L(B_{nn}) = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & (n-1)^2 \end{bmatrix}.$$

Hasil penelitian ini selanjutnya dituangkan dalam Teorema 1 dan Teorema 2 serta Akibat 3 dan Akibat 4 pada subbab pembahasan.

PEMBAHASAN

Penelitian tentang spektrum Laplace dari jenis-jenis graf telah dilakukan diantaranya untuk graf Bintang S_n dan graf Lengkap K_n (Selvia, 2019), Spektrum Laplace graf Torus (Yahya & Soeharyadi, 2020) serta spektrum Laplace graf Kincir angin berarah Q_k^3 , $k \geq 3$ (Melly et al. 2022). Mengacu pada penelitian sebelumnya, spektrum Laplace dari graf Mahkota $S_n^0 \approx (K_2 \times K_n)^C$, $n \geq 3$ dan graf Benteng $B_{nn} \approx (K_n \times K_n)$, $n \geq 2$, diuraikan dalam sub bab berikut.

1. Spektrum Laplace dari Graf Mahkota S_n^0

Spektrum Laplace dari graf Mahkota, dapat ditentukan dengan terlebih dahulu menemukan polinomial karakteristik matriks Laplace-nya. Polinomial karakteristik matriks Laplace ditentukan dengan menggunakan persamaan $p(\lambda) = \det(\lambda I - L(S_n^0))$ dengan $L(S_n^0)$ merupakan matriks Laplace dari graf Mahkota S_n^0 . Tabel 1. merupakan polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Mahkota S_n^0 untuk $n = 3, 4, 5$.

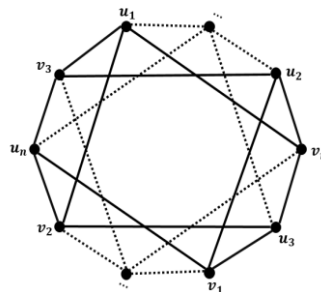
Berdasarkan bentuk polinomial karakteristik pada Tabel 1, diperoleh pola umum polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$ sebagaimana dituangkan dalam Teorema 1.

Tabel 1. Polinomial karakteristik matriks Laplace graf Mahkota S_n^0

Graf Mahkota S_n^0	Polinomial Karakteristik Matriks Laplace graf S_n^0 ($p(\lambda)$)
S_3^0	$\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2$
S_4^0	$\lambda(\lambda - 6)(\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^3$
S_5^0	$\lambda(\lambda - 8)(\lambda - 3)^4(\lambda - 5)^4$

Teorema 1. Polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Mahkota S_n^0 dengan $n \geq 3$ adalah $p(\lambda) = \lambda(\lambda - (2n - 2))(\lambda - (n - 2))^{n-1}(\lambda - n)^{n-1}$.

Bukti. Misal diberikan graf Mahkota $S_n^0 = (V(S_n^0), E(S_n^0))$ dengan $n \geq 3$. Definisikan himpunan simpul dan himpunan sisi pada graf Mahkota sebagai $V(S_n^0) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan $E(S_n^0) = \{u_i v_j, \text{ untuk } i \neq j\}$ dengan $n \geq 3, n \in \mathbb{Z}^+$. Berdasarkan definisi ini, graf Mahkota S_n^0 dapat dikonstruksi seperti Gambar 3 berikut ini.



Gambar 3. Graf Mahkota S_n^0

Matriks Laplace dari graf Mahkota adalah $L(S_n^0) = D(S_n^0) - A(S_n^0)$ dengan $A(S_n^0)$ adalah matriks ketetanggaan graf Mahkota dan $D(S_n^0)$ adalah matriks diagonal dengan elemen-elemen diagonalnya merupakan derajat dari setiap titik di graf Mahkota S_n^0 . Matriks Laplace dari graf Mahkota $L(S_n^0) = (l_{ij})$ berukuran $2n \times 2n$ dengan elemen baris ke i kolom ke j didefinisikan sebagai

$$l_{ij} = \begin{cases} n - 1, & i = j \\ -1, & i = 1; j = n + 2, n + 3, n + 4, \dots, 2n \\ & i = 2; j = n + 1, n + 3, n + 4, \dots, 2n \\ & i = 3; j = n + 1, n + 2, n + 4, \dots, 2n \\ & \vdots \\ & i = n; j = n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 2n - 1 \\ & i = n + 1; j = 2, 3, 4, \dots, n \\ & i = n + 2; j = 1, 3, 4, \dots, n \\ & \vdots \\ & i = 2n; j = 1, 2, 3, 4, \dots, n - 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases} \quad (1)$$

Berdasarkan persamaan (1), matriks Laplace dari graf Mahkota S_n^0 dapat dikonstruksi sebagai berikut

$$L(S_n^0) = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 & -1 & -1 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & 0 & n-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari matriks Laplace $L(S_n^0)$ adalah $p(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - L(S_n^0))$. Akar-akar karakteristik diperoleh dari persamaan karakteristik $p(\lambda) = 0$. Perhatikan bahwa

$$\det(\lambda I_{2n} - L(S_n^0)) = 0$$

$$\begin{bmatrix} p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & p & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & p & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & p & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \end{bmatrix} = 0 \tag{2}$$

dimana $p = \lambda - (n - 1)$. Untuk memperoleh akar-akar karakteristik dari matriks $\lambda I_{2n} - L(S_n^0)$, determinan pada persamaan (2) dicari dengan cara mereduksi baris atau kolom matriks $\lambda I_{2n} - L(S_n^0)$ menjadi matriks segitiga atas. Dengan menggunakan sifat-sifat determinan dalam mereduksi baris/kolom, persamaan (2) menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{n-2}{n-3}\right) & -\frac{1}{n-3} & \left(-\frac{p}{n-3}\right) & \left(-\frac{p}{n-3}\right) & \dots & p & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \left(-\frac{n-1}{n-2}\right) & \left(-\frac{p}{n-2}\right) & \left(-\frac{p}{n-2}\right) & \dots & \left(-\frac{p}{n-2}\right) & p \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q & \frac{(n-2)p^2}{4} & \dots & q & q \\ p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & s & \dots & s & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s & s \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \left(\frac{t}{q}\right) \end{bmatrix} = 0. \tag{3}$$

dimana,

$$p = \lambda - (n - 1).$$

$$q = \left(-\frac{1}{n-1} \lambda^2 + 2\lambda - (n - 2)\right)$$

$$r = (-\lambda^2 + (2n - 2)\lambda - (n - 1)(n - 2))$$

$$s = -\lambda^2 + (2n - 2)\lambda - (n^2 - 2n)$$

$$t = \lambda(\lambda^3 - (4n - 4)\lambda^2 + (5n^2 - 10n + 4)\lambda - (2n^3 - 6n^2 + 4n))$$

Selanjutnya, dengan mengalikan elemen-elemen diagonal utama pada matriks segitiga atas dalam persamaan (3) diperoleh $\lambda(\lambda - (2n - 2))(\lambda - (n - 2))^{n-1}(\lambda - n)^{n-1} = 0$. Jadi, terbukti bahwa polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Mahkota (S_n^0) dengan $n \geq 3$ adalah $p(\lambda) = \lambda(\lambda - (2n - 2))(\lambda - (n - 2))^{n-1}(\lambda - n)^{n-1}$. ■

Akibat 2. Spektrum Laplace dari graf Mahkota (S_n^0) dengan $n \geq 3$ adalah

$$spec_L(S_n^0) = \begin{bmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 1., polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Mahkota (S_n^0) dengan $n \geq 3$ yaitu

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - (2n - 2))(\lambda - (n - 2))^{n-1}(\lambda - n)^{n-1} \tag{4}$$

Berdasarkan persamaan (4), akar-akar karakteristik yang merupakan nilai eigen matriks Laplace dari graf Mahkota (S_n^0), adalah $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = (n - 2), \lambda_2 = n,$ dan $\lambda_3 = (2n - 2)$, dengan multiplisitasnya $m(\lambda_0) = 1, m(\lambda_1) = (n - 1), m(\lambda_2) = (n - 1),$ dan $m(\lambda_3) = 1$. Jadi, terbukti spektrum Laplace dari graf Mahkota (S_n^0) dengan $n \geq 3$ adalah

$$spec_L(S_n^0) = \begin{bmatrix} 0 & n-2 & n & 2n-2 \\ 1 & n-1 & n-1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

2. Spektrum Laplace dari Graf Benteng B_{nn}

Sebagaimana cara menentukan spektrum Laplace dari graf Mahkota, Spektrum Laplace dari graf Benteng juga dapat ditemukan dengan terlebih dahulu menemukan polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng. Polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng B_{nn} adalah $p(\lambda) = \det(\lambda I - L(B_{nn}))$, dengan $L(B_{nn})$ adalah matriks Laplace dari graf Benteng B_{nn} . Tabel 2 berikut merupakan polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng untuk $n = 2, 3, 4$.

Tabel 2. Polinomial Karakteristik Matriks Laplace Graf Benteng B_{nn}

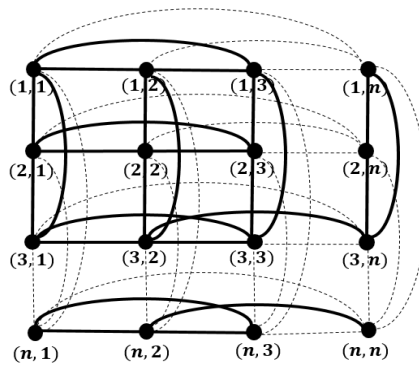
Graf Benteng B_{nn}	Polinomial Karakteristik Matriks Laplace graf Benteng B_{nn} ($p(\lambda)$)
B_{22}	$\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 2)^2$
B_{33}	$\lambda(\lambda - 6)^4(\lambda - 3)^4$
B_{44}	$\lambda(\lambda - 8)^9(\lambda - 4)^6$

Berdasarkan Tabel 2, secara umum polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng B_{nn} , dapat ditentukan sebagaimana dalam teorema 3 berikut.

Teorema 3. Polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng B_{nn} dengan $n \geq 2$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)^{(n-1)^2}(\lambda - n)^{2(n-1)}.$$

Bukti. Misal diberikan graf Benteng $B_{nn} = (V(B_{nn}), E(B_{nn}))$ untuk $n \geq 2$. Definisikan himpunan titik dan himpunan sisi pada graf Benteng dengan $V(B_{nn}) = \{x, y | 1 \leq x, y \leq n\}$ dan $E(B_{nn}) = \{((x_i, y_j), (x_k, y_l)) | x_i = x_k \text{ atau } y_j = y_l, 1 \leq i, j, k, l \leq n\}$. Berdasarkan definisi ini, graf Benteng B_{nn} untuk $n \geq 2$ dapat dikonstruksi seperti graf pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. Graf Benteng B_{nn}

Jika $A(B_{nn})$ menyatakan matriks ketetanggaan dari graf Benteng dan $D(B_{nn})$ menyatakan matriks diagonal dari graf Benteng, maka elemen baris ke i kolom ke j dari matriks Laplace dari graf Benteng $L(B_{nn}) = D(B_{nn}) - A(B_{nn}) = [l_{ij}]$, dapat didefinisikan sebagai berikut

$$l_{ij} = \begin{cases} 2(n-1), & i = j \\ -1, & i = 1; j = 2, 3, \dots, n, n+1, 2n+1, \dots, (n-1)n+1 \\ & i = 2; j = 1, 3, \dots, n, n+2, 2n+2, \dots, (n-1)n+2 \\ & \vdots \\ & i = n; j = 1, 2, \dots, (n-1), 2n, 3n, \dots, n^2 \\ & i = n+1; j = 1, n+2, n+3, \dots, 2n, 2n+1, \dots, (n-1)n+1 \\ & i = n+2; j = 2, n+1, n+3, \dots, 2n, 2n+2, \dots, (n-1)n+2 \\ & \vdots \\ & i = 2n; j = n, n+1, n+2, \dots, 2n-1, 3n, \dots, n^2 \\ & \vdots \\ & i = 3n; j = n, 2n, 2n+1, 2n+2, \dots, 3n-1, 4n, \dots, n^2 \\ & \vdots \\ & i = n^2-1, j = n-1, 2n-1, \dots, (n-1)n-1, (n-1)n+1, \dots, n^2 \\ & i = n^2; j = n, 2n, \dots, (n-1)n, (n-1)n+1, \dots, n^2-1 \\ & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (5)$$

Berdasarkan definisi ini, dapat dikonstruksi matriks Laplace dari graf Benteng $L(B_{nn})$ berukuran $n^2 \times n^2$ sebagai berikut

$$L(B_{nn}) = \begin{pmatrix} 2n-2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2n-2 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2n-2 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 2n-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 2n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2n-2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2n-2 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & 2n-2 & \dots & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & 2n-2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 2n-2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \\ & & & & \vdots & & & & & & & & \ddots & & & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2n-2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2n-2 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 & 2n-2 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & 2n-2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 2n-2 & -1 \end{pmatrix}$$

Polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng adalah $p(\lambda) = \det(\lambda I_{n^2} - L(B_{nn}))$. Akar-akar karakteristik diperoleh dari persamaan karakteristik $p(\lambda) = 0$.

Perhatikan bahwa

$$\det(\lambda I_{n^2} - L(B_{nn})) = 0$$

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & p & \ddots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & p & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & p & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 1 & 1 & p & \ddots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & p & 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & \vdots & & & & & & \ddots & & & & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & p & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 1 & 1 & p & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \ddots & p & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & p \end{pmatrix} = 0 \quad (6)$$

dimana $p = \lambda - 2(n - 1)$. Untuk memperoleh akar-akar karakteristik matriks $\lambda I_{n^2} - L(B_{nn})$, determinan pada persamaan (6) dicari dengan menggunakan sifat-sifat determinan dan mereduksi baris atau kolom dari matriks $\lambda I_{n^2} - L(B_{nn})$ menjadi matriks segitiga atas. Hasil reduksi baris/kolom dari hitung determinan pada persamaan (6) adalah

$$(-1) \begin{pmatrix} 1 & p & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & p & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & -1 & -1 & 2p & p^2 & r & \ddots & r & r & 1 & s & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 & -1 & 2p+v & p^2+v & 2p+v & \ddots & t & t & 1 & s & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2p+u & p^2+u & 2p+u & \dots & 2p+u & x & 1 & s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & s & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & s & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & y & -y & \dots & 0 & 0 & -y & y & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & y & \ddots & -y & 0 & 0 & 0 & -y & \ddots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & q & y & 0 & 0 & -q & \ddots & -y & 0 \\ & & & \vdots & & & & & & \ddots & & \frac{xy}{t} & y & xp & y & \dots & \frac{w^2}{t} & 1 \\ & & & & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & y & xy & y & \dots & y & y \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & q & 0 & \dots & -q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & -q & \ddots & q & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & q & -q \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & z \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

dimana,

$$p = \lambda - (2n - 2)$$

$$q = \lambda^2 - (3n + 1)\lambda + (2n^2 + 2n) r = \lambda - (2n - 3)$$

$$t = \lambda - (n + 1)$$

$$x = \lambda - n$$

$$y = \lambda - 2n$$

$$z = \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + n^2\lambda$$

$$u = n - 3$$

$$s = \lambda - (2n - 1)$$

$$v = n - 3$$

$$w = \lambda - (n - 1)$$

Selanjutnya, dengan mengalikan elemen-elemen diagonal utama pada matriks segitiga atas dalam persamaan (7) diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\begin{aligned} (-1)\det(\lambda I_{n^2} - L(B_{nn})) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2n)^{(n-1)^2}(\lambda - n)^{2(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti polinomial karakteristik matriks Laplace dari graf Benteng B_{nn} , dengan $n \geq 2$ adalah

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)^{(n-1)^2}(\lambda - n)^{2(n-1)}. \quad \blacksquare$$

Akibat 4. Spektrum Laplace dari graf benteng B_{nn} dengan $n \geq 2$ adalah

$$\text{spec}_L(B_{nn}) = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & (n-1)^2 \end{bmatrix}.$$

Bukti. Berdasarkan bukti pada Teorema 3., polinomial karakteristik dari matriks Laplace pada graf Benteng B_{nn} adalah

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2n)^{(n-1)^2}(\lambda - n)^{2(n-1)} \quad (8)$$

Akar-akar karakteristik dari polinomial karakteristik pada persamaan (8) merupakan nilai eigen matriks Laplace dari graf Benteng B_{nn} , yaitu $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = n$, dan $\lambda_2 = 2n$, dengan multiplisitasnya berturut-turut $m(\lambda_0) = 1$, $m(\lambda_1) = 2(n-1)$, dan $m(\lambda_2) = (n-1)^2$. Jadi, spektrum Laplace dari graf Benteng B_{nn} dengan $n \geq 2$ dapat disusun sebagai

$$\text{spec}_L(B_{nn}) = \begin{bmatrix} 0 & n & 2n \\ 1 & 2(n-1) & (n-1)^2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

SIMPULAN

Penelitian ini memberikan hasil secara umum bentuk polinomial karakteristik matriks Laplace dan spektrum Laplace dari graf Mahkota (S_n^0) dengan $n \geq 3$. Penelitian ini juga menghasilkan bentuk umum polinomial karakteristik matriks Laplace dan spektrum Laplace dari graf Benteng (B_{nn}) dengan $n \geq 2$. Penelitian lebih lanjut dapat dilakukan dengan menginvestigasi bentuk spektrum Laplace dari graf Benteng $B_{m,n}$ yang merupakan graf hasil perkalian kartesian antara graf Lengkap K_m dan K_n , serta spektrum Laplace dari jenis-jenis graf hasil operasi dua graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Aldous, J. M. & Wilson, R. J. (2004). *Graphs and Applications An Introductory Approach*. Great Britian: Springer.

Amaliyanah, M., Nurshiami, S. R., & Triyani, T. (2022). Spektrum Laplace pada Graf Kincir Angin Berarah Q_k^3 . *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, 22(2), 131-144. <https://doi.org/10.19184/mims.v22i2.31128>

- Arumugam, S., Brandstädt, A., & Nishizekii, T. (2016). *Handbook of Graph Theory, Combinatorial Optimization, and Algorithms*. New York: CRC Press.
- Biggs, N. (1993). *Algebraic Graph Theory*. New York: Cambridge University Press.
- Das, K. C. (2004). The Laplacian Spectrum of a Graph. *Computers and Mathematics with Applications* 48 (2004) 715-724. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.05.005>
- Das, K. C. & Mojallal, S. A. (2014). On Laplacian Energy of Graphs. *Discrete Math*, 325(1), 52-64. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.02.017>
- Deng, A., Kelmans, A., & Meng, J. (2013). Laplacian spectra of regular graph transformations. *Discrete Applied Mathematics*, Volume 161, Issues 1–2, (18-133). <https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.08.020>
- Du, Z. & Zhou, B. (2012). Upper Bounds for The Sum of Laplacian Eigenvalues of Graphs. *Linear Algebra Appl*, 436(9), 3672-3683. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.01.007>
- Fiedler, M. (1973). *Algebraic Connectivity of Graphs*. Accessed: March 7, 2023. [Online]. <http://dml.cz/dmlcz/101168>
- Insani, N. & Waryanto, N. H. (2012). Penerapan Teori Graf pada Analisis Jejaring Sosial dengan Menggunakan *Microsoft Nodexl*. *Pythagoras*, 7(1), 83-100. <http://dx.doi.org/10.21831/pg.v7i1.2839>
- Munir, R. (2016). *Matematika Diskrit Edisi 6*. Penerbit Informatika: Bandung.
- Orden, D., Guzman, J. M., Maestre, I. M., & Hoz, E. D. (2017). Spectrum Graph Coloring and Applications to WiFi Channel Assignment. *Symmetry*, 10(3), 65-92. <https://doi.org/10.3390/sym10030065>
- Runtuuwu, Y. I., Mananohas, M. L., & Montolalu, C. E. (2021). Derajat Laplacian dari Graf Lengkap, Graf Bipartisi Komplit, Graf Matahari dan Graf yang memiliki $n-1$ Derajat berbeda. *d'CARTESIAN: Jurnal Matematika dan Aplikasi*, 10(1), 15-23. <https://ejournal.unsrat.ac.id/index.php/decartesian/article/view/32698>
- Selvia, S. M., Narwen, N., & Zulakmal. (2019). Spektrum Graf Bintang S_n dan Graf Lengkap K_n Untuk $n \geq 2$. *Jurnal Matematika UNAND*, 4(4), 129-136. <https://doi.org/10.25077/jmu.4.4.129-136.2015>
- Yahya, A., & Soeharyadi, Y. (2020). Spektrum Operator Laplace Diskret pada graf Torus. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika*, 4(1), 35-49. <https://doi.org/10.26740/jram.v4n1.p35-49>