MODEL PERTUMBUHAN POPULASI BERDASARKAN KELOMPOK UMUR

Dwi Lestari
Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta

Abstrak

Penelitian matematika dalam bidang demografi dan ekologi sangatlah penting. Salah satu penelitian di bidang tersebut adalah tentang pertumbuhan populasi. Paper ini akan membahas tentang model pertumbuhan populasi berdasarkan kelompok umur. Model populasi berdasar kelompok umur merupakan model untuk memprediksi jumlah populasi di waktu yang akan datang berdasarkan kelompok umur. Model ini berbentuk kontinu atas waktu dan diskret atas kelompok umur. Model ini dikembangkan dari model pertumbuhan populasi berdasarkan kelompok umur dengan ukuran waktu diskret dan ukuran umur diskret. Dalam hal ini akan dibahas model kontinu atas waktu dan diskret atas umur sehingga diperoleh model berupa sistem persamaan diferensial serta model dapat dituliskan dalam bentuk matriks. Perubahan populasi yang meliputi *increasing, decreasing,* dan *asyimptoticaly* stationary dapat dilihat dari nilai eigen dari matriks yang terbentuk. Selain itu dapat dilihat *stable age structure* nya.

Kata kunci : model populasi, kelompok umur (*age-structured*), *stable age structure*.

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan, kita tidak lepas dari ilmu matematika. Beberapa bidang yang bisa dipelajari di matematika adalah analisis, statistika, aljabar, dan matematika terapan. Matematika terapan merupakan salah satu bidang yang sangat menarik untuk dipelajari. Dalam matematika terapan dipelajari konsep-konsep matematika dan penerapannya dalam kehidupan nyata. Salah satu contoh yang dipelajari dalam matematika terapan adalah pemodelan matematika.

Model matematika merupakan representasi masalah kehidupan nyata yang dibawa ke dalam bentuk simbol-simbol matematika. Sedangkan pemodelan matematika adalah proses membawa masalah kehidupan nyata ke dalam bentuk simbol-simbol matematika melalui langkah-langkah yang sistematis. Masalah yang pernah dijumpai dalam bidang kependudukan, yakni masalah pertumbuhan populasi. Terdapat model matematika untuk menyelesaikan masalah pertumbuhan populasi, sebagai contoh yakni model logistik. Model logistik ditemukan oleh Verhulst pada tahun 1830. Model ini merupakan model populasi dengan asumsi tidak berdasarkan usia. (*Non-Age Structured Population Models*).

Dalam paper ini akan dibahas model pertumbuhan populasi berdasarkan usia. Model yang dibahas di sini merupakan model berbentuk kontinu atas waktu dan diskret atas kelompok umur. Pada model yang berbentuk diskret, setiap kelompok umur menggambarkan interval waktu yang sama. Interval waktu ini sama dengan interval pada bentuk sistem persamaan diferensi. Hal ini merupakan suatu pembatasan model. Umur beberapa populasi hewan tidak bisa ditentukan secara pasti, misalnya populasi serangga. Ada empat kelompok perkembangan populasi serangga, yakni telur, larva, pupa, dan dewasa, dengan interval waktu yang bermacam-macam

Ketika umur dapat ditentukan dengan interval waktu yang sama, maka untuk ketelitian yang lebih besar bisa digunakan interval waktu yang lebih kecil. Oleh karena itu, pembentukan model kontinu dengan persamaan diferensial akan memberikan pendekatan yang lebih baik.

Model ini sangat penting untuk dipelajari karena untuk mengetahui banyaknya populasi khususnya berdasarkan usia di beberapa waktu yang akan datang. Beberapa faktor yang mempengaruhi perubahan populasi adalah keadaan geografis, ketersediaan makanan, interaksi antar populasi dan sebagainya. Pembahasan model ini dimulai dari asumsi model, nilai eigen, vektor eigen dan *stable age structure*-nya

ASUMSI MODEL

Tidak ada model matematika yang benar atau salah, yang ada adalah model-model yang dibuat adalah sesuai atau tidak sesuai untuk menggambarkan masalah nyata. Pada proses pembentukan model perlu adanya pembentukan asumsi-asumsi. Hal ini bertujuan untuk menyederhanakan model. Semakin sederhana sebuah model, semakin jauh dari keadaan nyata, dan berlaku sebaliknya. Asumsi yang diberikan pada model ini adalah

1. Model berbentuk kontinu atas waktu dan diskret atas kelompok umur.
2. Model membahas satu jenis populasi betina. Karena kita hanya menghitung perubahan populasi betina dan menganggap populasi jantan tidak memberi pengaruh secara langsung kecuali inseminasi.

3. Individu dapat bertahan hidup dari tahun pertama ke tahun berikutnya.
4. Model berbentuk deterministik karena kita mempertimbangkan anggota populasi tertentu.

Oleh karena itu, akan ditentukan $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . . $x_n(t)$ dengan $x_1(0)$, $x_2(0)$, . . $x_n(0)$ diketahui. Model ini berbentuk linear karena semua perubahan diasumsikan proporsional dengan ukuran populasi.

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Misalkan populasi dibagi kedalam n kelompok dan populasi n kelompok pada waktu t adalah $x_1(t)$, $x_2(t)$,...,$x_n(t)$. Kemudian p adalah kelompok *pre-reproductive*, q kelompok reproductive dan r kelompok post-reproductive sehingga $p + q + r = n$. Misalkan b_{p+1}, b_{p+2}, ..., b_{p+q} adalah laju kelahiran pada q kelompok umur reproductive dan d_1, d_2, ..., d_n adalah laju kematian n kelompok umur. Selanjutnya, m_i adalah laju daya tahan hidup menuju kedewasaan dari kelompok umur i ke kelompok umur $i + 1$, dengan $i = 1,2,...,n$-1 dan $m_n = 0$.

Laju perubahan populasi kelompok umur pertama ditentukan oleh:

1. laju kelahiran pada q kelompok *reproductive*
2. laju kematian pada kelompok pertama
3. laju daya tahan hidup dari kelompok pertama ke kelompok berikutnya.

Laju perubahan populasi setiap kelompok umur yang lain ditentukan oleh:

1. laju daya tahan hidup dari kelompok sebelumnya
2. laju kematian pada setiap kelompok
3. laju daya tahan hidup dari setiap kelompok ke kelompok berikutnya.

Berdasarkan uraian di atas, kita peroleh sistem persamaan diferensial untuk model linear kontinu terhadap waktu, sebagai berikut.

$$\frac{dx_1}{dt} = b_{p+1}x_{p+1} + \cdots + b_{p+q}x_{p+q} - (d_1 + m_1)x_1,$$

$$\frac{dx_i}{dt} = m_{i-1}x_{i-1} - (d_i + m_i)x_i, \quad i = 2,3,\ldots,n \qquad \ldots(1)$$

Sistem (1) dapat dituliskan dalam bentuk matriks berikut.

$$\frac{dX}{dt} = BX \qquad \ldots(2)$$

dengan B adalah matriks n x n yang memuat:

1. elemen diagonal $-(d_1+m_1), -(d_2+m_2),..., -(d_n+m_n)$,
2. elemen sub diagonal utama $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$
3. elemen baris pertama, kolom ke p+1 sampai $p+q$ adalah $b_{p+1}, b_{p+2}, \ldots, b_{p+q}$
4. nol untuk yang lain.

Oleh karena itu, (2) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dX}{dt} = Y\Lambda Y^{-1}X \qquad ...(3)$$

dimana Λ adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal merupakan nilai eigen dari matriks B dan Y adalah matriks dengan kolomnya merupakan vektor eigen dari matriks B. Penyelesaian (3), yakni

$$X(t) = Ye^{\Lambda t}Y^{-1}X(0) \qquad ...(4)$$

Solusi ini bergantung pada nilai eigen dan vektor eigen dari B. Khususnya nilai eigen yang bagian realnya mempunyai nilai paling besar. Nilai eigen terbesar mempunyai peran penting untuk menentukan pertumbuhan populasi *asymptotic* saat t mendekati ∞. Sebanyak r nilai eigen dari B diberikan oleh

$$-(d_j+m_j), \qquad j = p+q+1, p+q+2, ..., n \qquad ...(5)$$

dan $p+q$ nilai eigen lainnya adalah akar dari

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) \equiv\ & (d_1 + m_1 + \lambda)(d_2 + m_2 + \lambda)\cdots(d_{p+q} + m_{p+q} + \lambda) \\ & - m_1 m_2 \cdots m_p \{b_{p+1}(d_{p+2} + m_{p+2} + \lambda)\cdots(b_{p+q} + d_{p+q} + \lambda) \\ & + b_{p+2} m_{p+1}(d_{p+3} + m_{p+3} + \lambda)\cdots(d_{p+q} + m_{p+q} + \lambda) + \cdots \\ & + b_{p+q} m_{p+1} m_{p+2} \cdots m_{p+q-1}\} = 0 \qquad \ldots(6)\end{aligned}$$

Jika d + m merupakan nilai paling kecil dari $d_i + m_i$, untuk i = 1,2,...,$p+q$ maka

$$\psi[-(d+m)] < 0, \qquad \psi(\infty) > 0 \qquad ...(7)$$

Sehingga ada paling sedikit satu nilai eigen real yang lebih besar dari $-(d + m)$. Selanjutnya kita dapat menuliskan (6) sebagai berikut.

$$\phi(\lambda) \equiv \frac{b_{p+1}}{(d_1+m_1+\lambda)\cdots(d_{p+1}+m_{p+1}+\lambda)} + \frac{b_{p+2}m_{p+1}}{(d_1+m_1+\lambda)\cdots(d_{p+2}+m_{p+2}+\lambda)}$$

$$+\cdots+\frac{b_{p+q}m_{p+1}\cdots m_{p+q-1}}{(d_1+m_1+\lambda)\cdots(d_{p+q}+m_{p+q}+\lambda)} = \frac{1}{m_1m_2\cdots m_p} \qquad ...(8)$$

Jelas bahwa $\phi'(\lambda)<0$ untuk λ bertambah dari –(*d*+*m*) menuju ∞. Jadi, ϕ merupakan fungsi monoton turun. Oleh karena itu,

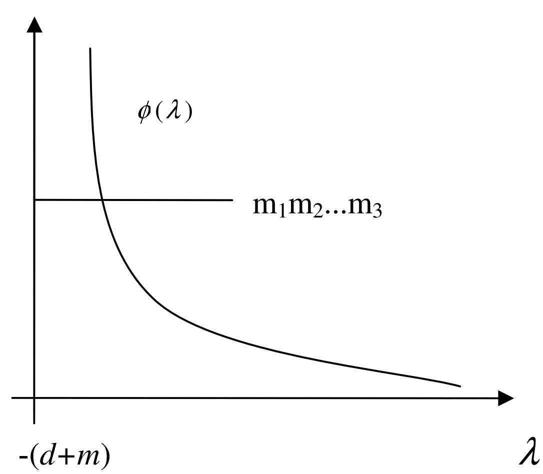
$$\phi(\lambda) = \frac{1}{m_1m_2\cdots m_p} \qquad ...(9)$$

hanya mempunyai satu akar real yang lebih besar dari –(*d*+*m*), (lihat gambar1) misal dinotasikan λ_1.

Semua akar yang lain, yakni kompleks atau real negatif dan kurang dari –(*d*+*m*). Jika $\phi(\lambda)<0$ maka λ_1 bernilai positif, yakni jika

$$(d_1+m_1)\cdots(d_{p+q}+m_{p+q}) < m_1m_2\cdots m_p\{b_{p+1}(d_{p+2}+m_{p+2})\cdots(d_{p+q}+m_{p+q})$$
$$b_{p+2}(d_{p+3}+m_{p+3})\cdots(d_{p+q}+m_{p+q})+\cdots+b_{p+1}m_{p+1}m_{p+2}\cdots m_{p+q-1}\} \qquad ...(10)$$

Diasumsikan bahwa $d+m<d_j+m_j$, untuk $j=p+q+1,\ldots,p+q+r$. ...(11)



Gambar 1. Grafik $\phi(\lambda)$

Jika (10) dipenuhi, maka semua kelompok umur dari populasi akhirnya tumbuh secara eksponensial.

Misalkan u_1, u_2, ..., u_n adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ dari B sehingga diperoleh,

$b_{p+1}u_{p+1} + ... + b_{p+q}u_{p+q} = (d_1+m_1+\lambda)u_1$,

$$m_{i-1}u_{i-1} = (d_i+m_i+\lambda)u_i \qquad \text{, untuk } i = 2,3,\ldots,n \qquad ...(12)$$

sehingga

$$\frac{u_1}{(d_2+m_2+\lambda)\cdots(d_n+m_n+\lambda)} = \frac{u_2}{m_1(d_3+m_3+\lambda)\cdots(d_n+m_n+\lambda)}$$

$$= \frac{u_n}{m_1m_2\cdots m_{n-1}} \qquad ...(13)$$

Karena

$$(d_i+m_i+\lambda_i) > 0 \qquad \text{untuk } i = 1,2,3,\ldots,n \qquad ...(14)$$

maka vektor eigen X_1 yang berkorespondensi dengan λ_1 mempunyai elemen yang semuanya positif, yakni

$$X_1 = \begin{bmatrix} (d_2+m_2+\lambda_1)\cdots(d_n+m_n+\lambda_1) \\ m_1(d_3+m_3+\lambda_1)\cdots(d_n+m_n+\lambda_1) \\ \vdots \\ m_1m_2\cdots m_{n-1} \end{bmatrix} \qquad ...(15)$$

Jika diambil sebarang nilai eigen lain yakni kompleks atau real negatif maka akan memberikan vektor eigen yang bersesuaian juga kompleks dan real negatif. Oleh karena itu, hanya nilai eigen λ_1 yang memberikan vektor eigen dengan elemen positif.

STABLE AGE STRUCTURE

Model pertumbuhan populasi berdasarkan kelompok umur yang diperoleh berupa sistem persamaan diferensial. Sekarang akan dibahas mengenai stable age structure-nya. Populasi dikatakan memiliki stable age structure jika

$$x_1(t) : x_2(t) : \cdots : x_n(t) = x_1(0) : x_2(0) : \cdots : x_n(0)$$

$$x_i(t) = f(t)x_i(0) \qquad \text{atau } X(t) = f(t)X(0) \qquad ...(16)$$

Atau

$$\frac{dX}{dt} = f'(t)X(0)$$

sehingga

$$\frac{dX}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)}X(t) \qquad ...(17)$$

Atau

$$BX(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}X(0) \Leftrightarrow BX(0) = \frac{f'(t)}{f(t)}X(t) \qquad ...(18)$$

Oleh karena itu $\frac{f'(t)}{f(t)}$ harus merupakan konstanta dan sama dengan nilai eigen dari B yang memberikan vektor eigen positif, sehingga

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \lambda_1 \qquad , X(0) = X_1 \qquad \ldots(19)$$

Dengan mengintegralkan persamaan pertama (19) dan menggunakan nilai awal $f(0)=1$, diperoleh

$$f(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad ...(20)$$

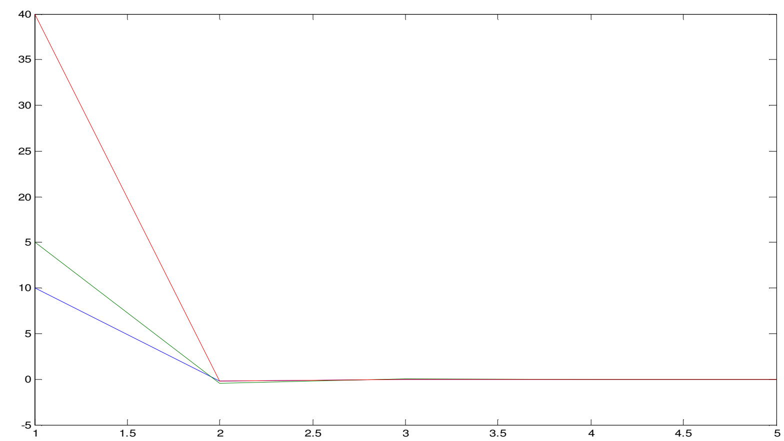
Oleh karena itu, stable age structure hanya diberikan oleh X_1 dan jika pada awalnya populasi memiliki stable age structure, ini akan berlanjut untuk setiap waktu. Selain itu, jika $\lambda_1 > 0$, populasi setiap kelompok umur akan tumbuh secara eksponensial. Jika $\lambda_1 <$ 0, populasi berkurang secara eksponensial.

Contoh.

Berikut diberikan contoh tentang masalah pertumbuhan populasi serangga dengan data berikut, nilai $p=q=r=1$; $b_2 =0.02$; $d_1=0.015$ $d_2=0.010$ $d_3=0.020$
$m_1=0.03$; $m_2 = 0.04$; $x_1(0) = 10$ $x_2(0) = 15$ $x_3(0) = 40$
maka dapat dibentuk matriks B, yakni

$$B = \begin{bmatrix} -0.045 & 0.2 & 0 \\ 0.03 & -0.050 & 0 \\ 0 & 0.04 & -0.020 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan MATLAB dihitung sampai iterasi kelima yakni t = 5, diperoleh grafik pertumbuhan pada gambar 2.



Gambar 1. Grafik pertumbuhan populasi

Gambar 2 menunjukkan untuk nilai t yang membesar ternyata nilai $x(t)$ mendekati nol. artinya populasinya menurun untuk waktu t yang membesar.

SIMPULAN

Model pertumbuhan populasi berdasarkan kelompok umur merupakan model untk memprediksi banyaknya populasi di waktu yang akan datang khususnya dilihat berdasarkan kelompok umur. Model yang dibahas berbentuk kontinu atas waktu dan diskret atas kelompok umur. Model yang diperoleh berupa sistem persaman diferensial yang bisa dituliskan dalam bentuk matriks. Untuk mengamati perubahan populasi bisa dilihat dari nilai eigen matriks pada bentuk model. Nilai eigen yang dimaksud merupakan nilai eigen dominan. Vektor eigen yang bersesuaian memiliki elemen positif. Untuk stable age structure-nya, jika $\lambda_1 > 0$, populasi setiap kelompok umur akan tumbuh secara eksponensial. Jika $\lambda_1 < 0$, populasi berkurang secara eksponensial.

Untuk penerapan lebih lanjut, pembahasan ini bisa digunakan untuk mempelajari model penyebaran penyakit berdasarkan kelompok umur.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H and Rorres. 2005. *Elementary Linear Algebra, Applications Version,9th ed*. New York: John Wiley & Sons.Inc

Gerald J. Porter and David R. Hill. 1996.*Interactive Linear Algebra (A Laboratory Course Using MathCad).* New York: Springer-Verlag.

Goldberg, Jack L. 1991. *Matrix Theory with Applications.* New York: McGraw-Hill,Inc.

Hogben, Leslie. 2007. *Handbook of Linear Algebra*. New York: Taylor & Francis Group.

Kapur, J.N. 1985. *Mathematical Model in Biology and Medicine*. New Delhi: EWP.