



Generalisasi Pertidaksamaan Euler untuk Membuktikan Planaritas Graf K_5 dan $K_{3,3}$

Emut

Departemen Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta, Indonesia

* Corresponding Author. E-mail: emut_kh@uny.ac.id

ARTICLE INFO

Article History:

Received: 26-Jun. 2022

Revised: 02-Nov. 2022

Accepted: 09-Nov. 2022

Keywords:

Teori graf, K_5 dan $K_{3,3}$,
 planaritas graf, teorema
 generalisasi
 pertidaksamaan Euler.

ABSTRACT

Penulisan artikel ini bertujuan untuk melakukan generalisasi atau perumuman teorema planaritas untuk K_5 dan teorema planaritas untuk $K_{3,3}$. Eksistensi perumuman teorema ini penting karena dapat membuktikan planaritas K_5 dan sekaligus $K_{3,3}$ serta planaritas beberapa graf yang terkait. Artikel ini merupakan hasil kajian literatur tentang teori graf, khususnya planaritas suatu graf, yaitu menentukan apakah suatu graf itu termasuk graf planar atau graf tidak planar. Pembuktian ketidakplanaran graf lengkap K_5 dan $K_{3,3}$ memberikan manfaat besar terhadap pengembangan teori planaritas graf dan memantapkan jaminan kebenaran pada terapannya. Urgensi pembuktiannya memiliki peran yang besar dalam menentukan planaritas graf-graf yang terkait, baik isomorfik atau subdivisi. Salahsatu produk perannya adalah lahirnya teorema Kurotavski yang memberikan syarat perlu dan cukup suatu graf planar. Teorema Kurotavski menjelaskan bahwa suatu graf G adalah planar jika dan hanya jika G tidak memuat subgraph yang isomorfik dengan K_5 atau $K_{3,3}$ atau sebarang graf subdivisi dari K_5 atau $K_{3,3}$. Proses generalisasi teorema dilakukan melalui kajian terhadap sifat-sifat khusus pada K_5 dan sifat-sifat khusus yang dimiliki $K_{3,3}$. Sifat-sifat khusus tersebut diperumum sehingga diperoleh suatu sifat yang berlaku baik untuk K_5 dan $K_{3,3}$. Berdasarkan hasil generalisasi sifat tersebut, kemudian dikombinasikan pada teorema pertidaksamaan Euler dan dihasilkan teorema yaitu jika G suatu graf planar, terhubung, $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$ dan panjang siklus terpendeknya adalah k, dengan $k \geq 3$ maka berlaku $m \leq \frac{k}{(k-2)}(n-2)$. Teorema generalisasi ini mampu membuktikan K_5 dan $K_{3,3}$ secara langsung dan beberapa graf terkait secara mudah.

The purpose of this article is to generalize the planarity theorem for K_5 and the planarity theorem for $K_{3,3}$. The existence of this generalization theorem is important because it can prove the planarity of K_5 and $K_{3,3}$ as well as the planarity of several related graphs. This article is the result of a literature review on graph theory, especially the planarity of a graph, which is to determine whether a graph is a planar graph or a non-planar graph. Proving the unplanarity of complete graphs K_5 and $K_{3,3}$ provides great benefits to the development of graph planarity theory and strengthens the guarantee of truth in its application. The urgency of the proof has a big role in determining the planarity of the related graphs, either isomorphic or subdivision. One of the products of its role is the birth of Kurotavski's theorem which provides the necessary and sufficient conditions for a planar graph. Kurotavski's theorem explains that a graph G is planar if and only if G does not contain subgraphs that are isomorphic with K_5 or $K_{3,3}$ or any graph subdivisions of K_5 or $K_{3,3}$. The generalization process of the theorem is carried out through a study of the special properties of K_5 and the special properties of $K_{3,3}$. These special properties are generalized to obtain a property that is valid for both K_5 and $K_{3,3}$. Based on the results of the generalization of these properties, then combined with the Euler inequality theorem and the resulting theorem is if G is a planar graph, connected, $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$ and the length of the shortest cycle is k, with $k \geq 3$ then applies to $m \leq \frac{k}{(k-2)}(n-2)$. This generalization theorem is able to prove K_5 and $K_{3,3}$ directly and several related graphs easily.



This is an open access article under the [CC-BY-SA](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) license



How to Cite:

Emut, E. (2022). Generalisasi pertidaksamaan euler untuk membuktikan planaritas graf K_5 dan $K_{3,3}$. *Pythagoras: Jurnal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 17(2), 472-458. <https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i2.51400>

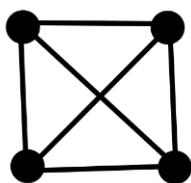
<https://doi.org/10.21831/pythagoras.v17i2.51400>

PENDAHULUAN

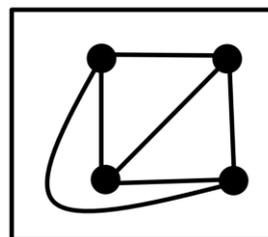
Teori graf adalah salah satu bagian matematika yang berbasis terapan. Sebagai matematika terapan, teori graf memiliki materi yang mampu memberi alternatif solusi baik, benar dan optimal. Melalui pemodelan graf, yaitu objek permasalahan dinotasikan simpul dan hubungan antar objek dimodelkan dengan rusuk, kemudian ditentukan solusi optimalnya. Kata baik dan optimal merujuk pada penentuan biaya minimum atau pemasukan optimum dan aman (Chatrand, 1977). Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai berikut : misalkan G suatu himpunan tidak kosong, $V(G)=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan dengan anggota simpul-simpul dari G , $E(G)=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah himpunan dengan anggota rusuk-rusuk dari G . Himpunan G dilengkapi dengan $V(G)$ dan himpunan $E(G)$, ditulis $(G, V(G), E(G))$ disebut suatu graf jika himpunan $V(G)$ bukan himpunan kosong (Sugeng, 2010). Untuk penulisan selanjutnya ditulis G . Melalui definisi tersebut, teori graf mampu berkembang dan memberi alternatif solusi terhadap permasalahan terkait secara mudah dan optimal. Saat ini, seiring dengan perkembangan teknologi, teori graf berkembang dan bergandengan tangan dengan teknologi untuk memberi solusi secara cepat, akurat dan optimal. Berbagai masalah dapat diselesaikan dengan teori graf mulai dari telekomunikasi, transportasi, pertanian, perhubungan dan tentunya untuk pengembangan matematika sendiri.

Bermula dari suatu kasus kecil, seorang pengembang perumahan akan membangun tiga rumah, yaitu A, B dan C. Masing-masing rumah membutuhkan fasilitas pokok yaitu Air, Gas dan Listrik. Fasilitas tersebut dihubungkan melalui pipa dari sumber ke masing-masing rumah. Sedangkan diketahui bahwa ketiga kebutuhan tersebut memberikan dampak negatif (beresiko tinggi) terhadap keselamatan jika bertemu, yaitu jika pipa-pipanya berpotongan. Untuk memberi jaminan keamanan atau keselamatan penggunaannya maka harus dibuktikan bahwa tidak terdapat perpotongan pipa-pipanya. Teori graf memberikan alternatif solusi melalui terapan materi graf planar. Graf planar menjamin pada pemodelannya tidak terdapat perpotongan rusuk-rusuknya (Wilson, 2010). Di samping pada kasus di atas, graf planar juga dapat diterapkan pada integrated circuit (IC) pada Printed Circuit Board (PCB) dan semua permasalahan yang mengharuskan tidak terjadinya perpotongan rusuk-rusuknya serta optimal hasilnya. Kolaborasi antara graf bidang, graf planar dan graf tidak planar menjawab dan menyelesaikan permasalahan ini dengan baik, optimal dan aman.

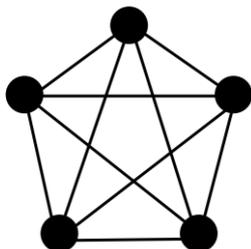
Graf G disebut graf bidang (plane graph) jika G suatu graf yang digambar pada bidang datar sehingga tidak terdapat perpotongan rusuk-rusuknya. Graf G disebut graf planar (planar graph) jika G dapat digambar pada bidang datar sehingga tidak terdapat perpotongan rusuk-rusuknya. Atau G suatu graf planar jika G dapat digambar sebagai graf bidang. Sedangkan, jika penggambaran pada bidang datar terdapat perpotongan rusuk-rusuknya maka disebut graf tidak planar (unplanar graph) (Wilson, 1990). Atau G disebut graf tidak planar jika G tidak dapat digambar sebagai graf bidang.



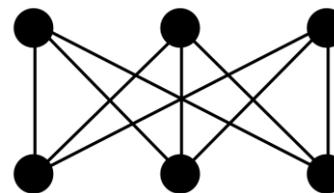
Gambar 1



Gambar 2



Gambar 3



Gambar 4

K_5 (Gambar 3) dan $K_{3,3}$ (Gamba 4) adalah contoh graf tidak planar karena keduanya tidak memiliki graf bidang. Penjelasan tentang bukti K_5 dan $K_{3,3}$ masing-masing adalah graf tidak planar, akan dijelaskan secara lengkap pada pembahasan. Tujuan penulisan makalah ini adalah menyusun dan membuktikan teorema yang merupakan generalisasi dari persamaan serta pertidaksamaan euler pada graf K_5 dan $K_{3,3}$. Penulisan makalah ini merupakan studi literatur yang penulis lakukan dari buku-buku, jurnal, makalah dan sumber lain yang berkaitan dengan teori graf, khususnya planaritas suatu graf.

HASIL DAN PEMBAHASAN

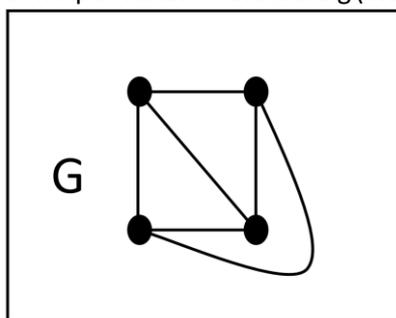
Graf Planar dan Graf Tidak Planar

Sebagaimana sudah didefinisikan pada pendahuluan, bahwa G disebut suatu graf planar jika G dapat digambar graf bidangnya. Secara analog, G disebut suatu graf tidak planar jika G tidak dapat digambar sebagai graf bidang. Artinya, setiap penggambaran G dalam bidang datar selalu terdapat perpotongan rusuk-rusuknya. Eksistensi graf G tidak planar memberikan informasi bahwa setiap penggambaran selalu menghasilkan perpotongan rusuk sehingga dapat dihindari untuk menjamin keselamatan, jika disyaratkan graf planar. Karena begitu penting peranan graf planar maka mengetahui eksistensi graf tidak planar juga sangat penting sehingga dapat dihindari resiko yang muncul. Berbagai cara dikembangkan untuk membuktikan planaritas suatu graf. Penggunaan kata planaritas dan ketidakplanaran menjadi suatu yang analog sehingga dapat dipilih salahsatu. Untuk selanjutnya digunakan kata planaritas suatu graf. Dalam menentukan planaritas suatu graf, dua graf yang sangat berperan yaitu graf lengkap dengan lima simpul (K_5) dan graf bipartet lengkap $K_{(3,3)}$. Produknya, muncul teorema yang dikenal dengan Teorema Kuratovski, yaitu Suatu graph G adalah planar jika dan hanya jika G tidak memuat subgraph yang isomorphik dengan $K_{3,3}$ atau K_5 atau sebarang subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5 .

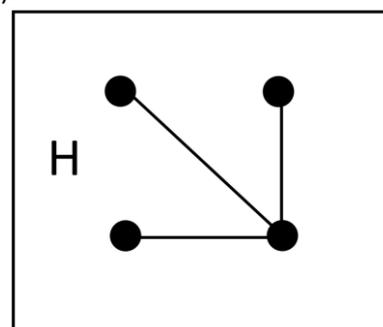
Teorema Jabat Tangan untuk Graf Planar

Telah diketahui bahwa teorema jabat tangan berlaku untuk menentukan hubungan jumlahan derajat simpul-simpul dan banyaknya rusuk dalam suatu graf G . Akan dibuktikan bahwa teorema jabat tangan berlaku untuk jumlahan derajat bidang dan banyaknya rusuk pada graf planar G . Untuk keperluan ini, perlu diketahui pengertian daerah bidang yang disebut muka, derajat muka dan hubungannya dengan banyak rusuk.

Jika G suatu graf planar maka G dapat digambar pada bidang datar dan akan membagi bidang datar menjadi beberapa daerah bidang. Daerah potongan bidang tersebut dinamakan muka (face), dinotasikan $f_i, i=1,2, \dots, f$, dengan banyak muka adalah $|F(G)|=f$. Dalam literatur lain, terdapat penamaan lain, yaitu daerah(region) (Chartrand & Zhang, 2005). Suatu muka dibatasi oleh simpul-simpul dan rusuk-rusuk sehingga terdapat muka yang terbatas daerahnya (muka dalam) dan muka yang tidak terbatas daerahnya (muka luar). Setiap graf memiliki satu muka luar. Jika G suatu graf pohon maka hanya memiliki muka luar, sedangkan graf bukan pohon memiliki minimum satu muka dalam. Makna graf bukan pohon berarti mempunyai sikel atau membentuk graf takterhubung. Jika G graf takterhubung maka terdapat berhingga komponen, yang merupakan graf terhubung. Derajat suatu muka $f_i, i=1,2, \dots, f$ adalah banyaknya rusuk yang dilalui, baik itu membatasi atau membelakangi dari suatu simpul v dan kembali ke v . Atau banyaknya rusuk yang dilalui dalam bentuk perjalanan tertutup $v-v$, karena baik simpul maupun rusuk boleh berulang (Wilson & Watkin, 1990).

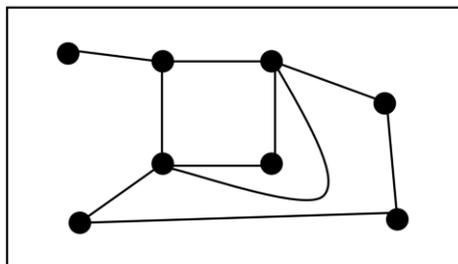


Gambar 5



Gambar 6

Perhatikan, pada Gambar 5 diketahui Graf G planar dan membagi bidang menjadi 4 muka, yaitu 3 muka dalam dan 1 muka luar. Derajat f_1, f_2, f_3 dan f_4 masing-masing adalah 3,3,3, dan 3. Pada Gambar 6, karena H suatu graf pohon maka hanya memiliki muka luar f_1 , dengan $der(f_1)=6$.



Gambar 7

Pada Gambar 7 diketahui Graf G mempunyai 4 muka, yaitu 3 muka dalam dan 1 muka luar. Derajat f_1, f_2, f_3 dan f_4 masing-masing adalah 4,3,5, dan 8. Berdasarkan contoh di atas, masing-masing diperoleh hubungan yaitu $m=|E(H)|=3$, $der(f_1)=6$ dan $\sum der(f_i) = 2m$, serta $m=|E(K)|=10$, $\sum der(f_i) = 4+3+5+8 = 20 = 2m$. Suatu hasil yang memberikan bukti tertentu dari Teorema jabat tangan pada muka. Secara induktif, disajikan perluasan teorema jabat tangan, sebagai berikut.

Teorema 1: Jabat Tangan untuk Muka

Misalkan G suatu graf planar, dengan $|E(G)|=m$, $|F(G)|=f$, dengan muka $f_i, i=1,2,\dots,f$ maka berlaku $\sum der(f_i) = 2m$.

Bukti

Karena pada penghitungan derajat suatu muka maka setiap rusuk selalu dihitung dua kali, yaitu membatasi (yang membatasi muka dalam) dan membelakangi (muka luar) sehingga setiap rusuk menyumbang 2 pada penjumlahan derajat muka. Akibatnya, jumlahan derajat muka sama dengan dua kali banyaknya rusuk. Terbukti $\sum der(f_i) = 2m$ (Aldous & Robin, 2004).

Teorema Euler pada Graf Planar

Teorema Euler memberikan informasi terkait hubungan antara banyak simpul, banyak rusuk, banyak muka dalam graf bidang menghasilkan suatu konstanta. Akibatnya, jika diketahui panjang siklus yang termuat dalam suatu graf bidang, maka dapat diketahui hubungan antara f dan m . Teorema lengkapnya tersaji berikut.

Teorema 2: Rumus Euler

Jika G suatu graf planar, terhubung, dengan $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$ dan $|F(G)|= f$, dengan muka $f_i, i=1,2,\dots,f$ maka berlaku

$$n - m + f = 2.$$

Catatan :

Graf planar dan terhubung G adalah syarat perlu untuk $n-m+f=2$. Tetapi bukan syarat perlu dan cukup. Artinya, terdapat graf dengan $n-m+f=2$ tetapi G bukan graf planar dan terhubung.

Bukti

Kita gunakan induksi matematik atas banyaknya rusuk m .

- (i) Jika G graf planar, terhubung dengan banyak rusuk $m = 1$, maka G adalah pohon sehingga banyaknya simpul $n = 2$ dan banyak muka $f=1$, akibatnya didapat $n-m+f=2-1+2=2$. Jadi, benar untuk $m = 1$.
- (ii) Diasumsikan rumus benar untuk graf terhubung, dengan banyak simpul n , banyak rusuk $m = k$ dan banyak muka f , yakni, $n - m + f = 2$.
- (iii) Akan dibuktikan rumus benar untuk $m = k + 1$. Ambil sebarang graph terhubung planar G dengan banyak simpul n , banyak rusuk $m = k + 1$, dan banyak muka f .

Akan dibuktikan bahwa $n - (k + 1) + f = 2$. Ada dua kasus yang mungkin.

Kasus 1.

Jika G pohon, berlaku $n = m + 1$, sehingga nilai $m = k + 1 + 1 = k + 2$, dan $f = 1$. Jadi, $n - (k+1) + f = (k+2) - (k+1) + 1 = 2$. Jadi rumus benar untuk $q = k + 1$.

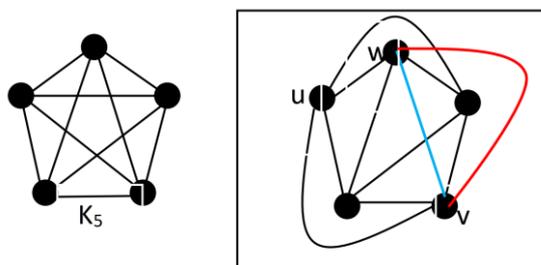
Kasus 2. Misalkan G bukan pohon. Karena G terhubung dan bukan pohon, G mempunyai siklus S . Pilih salah satu rusuk e pada S . Bentuk $G - e$, karena e dalam S maka $G - e$ graf terhubung, dengan banyak simpul n , dan banyak rusuk $m = (k+1) - 1 = k$, dan banyak muka $(f - 1)$, karena e dihapus maka muka berkurang satu. Karena $G - e$ mempunyai rusuk sebanyak k , menurut asumsi pada (ii), rumus benar untuk graph $G - e$, sehingga didapat

$$n - k + (f - 1) = 2 \leftrightarrow n - (k+1) + f = 2. \text{ Jadi terbukti untuk } m=k+1.$$

Berdasarkan hasil pada induksi matematik, maka rumus Euler benar, yaitu $n - m + f = 2$, untuk setiap n , m dan f (Sugeng, 2010). Usaha untuk membuktikan planaritas dari kedua graf tersebut banyak dilakukan oleh para pengembang graf, mulai dari metode penggambaran langsung hingga pengembangan teorema. Pada makalah ini akan dibahas beberapa metode, yaitu Penggambaran langsung, Kurva Jordan (Jordan's Curve), Pertidaksamaan Euler dan Perluasan Pertidaksamaan Euler.

Metode Langsung

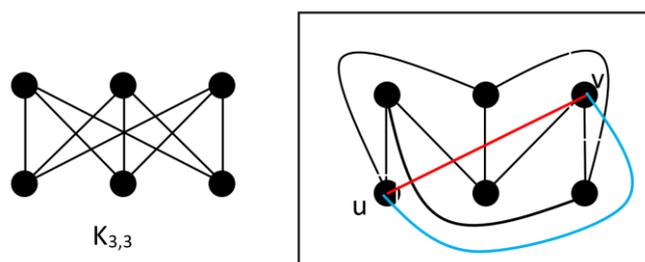
Sesuai dengan namanya, metode ini dilakukan dengan menggambar langsung dari semua kemungkinan. Anda perhatikan graf K_5 akan digambar pada bidang, didapat



Gambar 8

Pada Gambar 8 diperoleh K_5 yang digambar pada bidang dan tinggal tersisa satu rusuk yang hadir pada simpul v dan w . Rusuk vw memiliki 2 kemungkinan digambar, yaitu lewat dalam dan luar. Tetapi, baik lewat dalam(warna biru) maupun lewat luar(warna merah) maka rusuk vw akan memotong rusuk-rusuk yang lain. Maka untuk setiap kemungkinan penggambaran graf K_5 pada bidang, akan terjadi perpotongan rusuk-rusuknya. Dengan demikian, graf K_5 tidak memiliki graf bidang sehingga K_5 adalah graf takplanar.

Untuk pembuktian $K_{3,3}$ suatu graf takplanar dengan penggambaran langsung, dilakukan secara analog dengan pembuktian K_5 .



Gambar 9

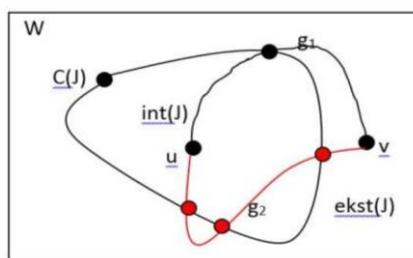
Setelah digambar $K_{3,3}$ dan tidak terdapat perpotongan rusuk pada Gambar 9, tinggal satu rusuk yaitu rusuk uv . Terdapat dua kemungkinan menggambar rusuk uv yaitu lewat dalam(warna merah) dan lewat luar(warna biru). Terlihat bahwa kedua kemungkinan penggambaran rusuk uv selalu memotong rusuk-rusuk di beberapa titik.

Maka, semua kemungkinan menggambar graf $K_{3,3}$ pada bidang datar selalu terdapat perpotongan rusuk-rusuknya sehingga $K_{3,3}$ adalah graf tidak planar (Wilson, 2010).

Kurva Jordan

Kurva Jordan digagas dan dikemukakan oleh matematikawan Perancis yang bernama Cammille Jordan (1838-1922). Pernyataan teorema kurva Jordan tampak jelas tetapi tidak berlaku untuk pembuktiannya. Matematikawan pertama yang berusaha membuktikan terorema Jordan adalah Bernard Bolzano dan Cammille Jordan sendiri, tetapi semua pembuktiannya tidak memuaskan. Baru tahun 1905, Oswald Veblen mampu secara memuaskan membuktikan teorema kurva Jordan.

Kurva Jordan, dinotasikan $C(J)$ adalah suatu kurva tertutup yang membagi bidang menjadi dua daerah yaitu daerah bagian dalam ($int(J)$) dan daerah bagian luar ($ekst(J)$) sedemikian hingga setiap garis yang menghubungkan dua titik yang terletak pada daerah yang berbeda akan memotong kurva di beberapa titik (Maehara, 1984). Sebagai ilustrasi, perhatikan gambar berikut.



Gambar 10

Pada Gambar 10, diketahui kurva jordan $C(J)$, $u \in int(J)$ dan $v \in ekst(J)$, dengan kata lain titik u dan v terletak pada daerah yang berbeda maka setiap garis yang menghubungkan u dan v akan memotong rusuk kurva di beberapa titik. Terlihat bahwa garis g_1 (merah) memotong kurva di 3 titik, dan garis g_2 (hitam) memotong kurva pada satu titik.

Untuk membuktikan planaritas K_5 dan $K_{3,3}$ maka dibuat kurva jordan dari 3 simpul pada K_5 dan kurva dibentuk oleh siklus terdiri dari 3 simpul dan 3 rusuk. Terdapat dua simpul dan dibuktikan dari semua kemungkinan 2 simpul ditempatkan pada 2 daerah, sehingga didapat 4 kemungkinan. Harus dibuktikan bahwa setiap kemungkinan dari penempatan dua simpul, selalu ditemukan perpotongan rusuk-rusuknya (Sugeng, 2010).

Akan dibuktikan bahwa K_5 adalah graf tidak planar dengan kurva Jordan.

Langkah-langkah pembuktian;

1). Bentuk kurva jordan, $C(J)$ dengan 3 simpul dan 3 rusuk. Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, v_5\}$, ingat $m = |E(K_n)| = \frac{1}{2} n(n-1)$. Karena 3 simpul diambil 3 simpul maka terdapat $C(5,3)$ banyaknya, yaitu 10 kemungkinan kurva Jordan. Dengan "tanpa mengurangi keumumannya, dipilih $C(J) = v_1, v_2, v_3, v_1$ untuk pembuktian pilihan yang lain, dibuktikan secara analog". Dalam hal ini, $C(J)$ berbentuk siklus v_1-v_1 , lintasan tertutup yang terbentuk barisan simpul dan rusuk.

2) Dua simpul tersisa, yaitu v_4 dan v_5 ditempatkan semua kemungkinan, yaitu

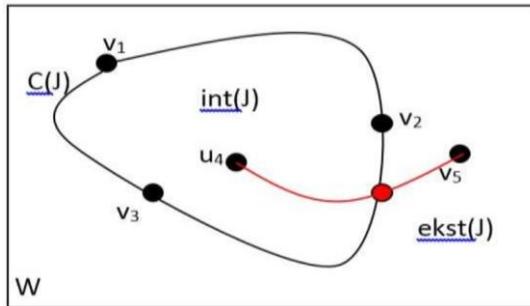
- i. $v_4 \in int(J)$ dan $v_5 \in ekst(J)$
- ii. $v_4 \in ekst(J)$ dan $v_5 \in int(J)$
- iii. $v_4 \in int(J)$ dan $v_5 \in int(J)$
- iv. $v_4 \in ekst(J)$ dan $v_5 \in ekst(J)$

Jika dari semua kemungkinan, penggambaran K_5 menghasilkan perpotongan rusuk maka K_5 adalah graf tidak planar.

Untuk $v_4 \in int(J)$ dan $v_5 \in ekst(J)$

Pada kasus ini, berarti sudah dimiliki kurva Jordan $C(J) = v_1, v_2, v_3, v_1$ dan $v_4 \in int(J)$ dan $v_5 \in ekst(J)$. Karena v_4 dan v_5 terletak pada daerah yang berbeda pada $C(J)$ maka menurut sifat $C(J)$ setiap garis yang menghubungkan v_4 dan v_5 akan memotong kurva di beberapa titik. Tinggal ditunjukkan bahwa ada rusuk yang menghubungkan (hadir) v_4 dan v_5 . Karena setiap pasang simpul pada K_5 adalah berikatan maka v_4 dan v_5 berikatan sehingga terdapat rusuk

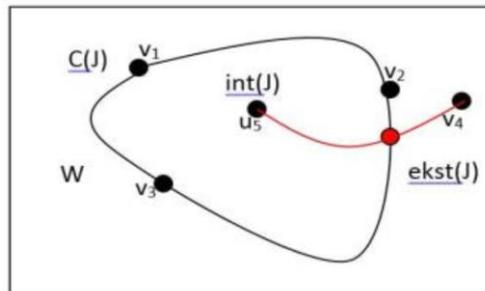
v_4v_5 . Menurut sifat $C(J)$ maka rusuk v_4v_5 akan memotong $C(J)$ di beberapa titik. Kesimpulan, untuk posisi $v_4 \in \text{int}(J)$ dan $v_5 \in \text{ekst}(J)$ maka terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 11

Berdasarkan hasil ini, belum bisa disimpulkan tentang planaritas K_5 karena semua kemungkinan belum diperiksa. Maka akan dilanjutkan untuk memeriksa posisi dari v_4 dan v_5 yang lain.

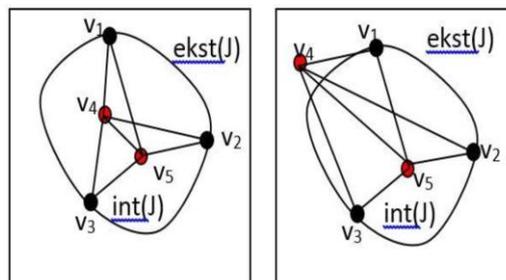
(ii) Untuk $v_4 \in \text{ekst}(J)$ dan $v_5 \in \text{int}(J)$. Kondisi ini adalah analog dengan kondisi (i). Maka didapat $C(J)$, v_4 dan v_5 terletak pada daerah yang berbeda pada $C(J)$ dan rusuk $v_4v_5 = \text{rusuk } v_5v_4$ karena graf tidak berarah. Akibatnya rusuk v_4v_5 akan memotong kurva $C(J)$ di beberapa titik, sehingga terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 12

(iii) Untuk $v_4 \in \text{int}(J)$ dan $v_5 \in \text{int}(J)$.

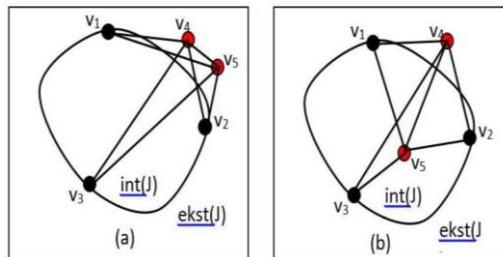
Pada posisi ini, $C(J)$ dan letak v_4 dan v_5 dapat divisualkan sebagai berikut. Kalau dilengkapkan diperoleh graf K_5 , yaitu pada (a) terlihat v_4 dan v_5 terletak pada $\text{int}(J)$, tetapi dengan menggeser posisi v_4 diperoleh graf K_4^* yang isomorfik dengan K_5 , dengan posisi v_4 terletak di $\text{ekst}(J)$, yang berbeda daerah dengan v_5 . Diketahui bahwa dua graf isomorfis jika kedua graf memiliki struktur yang sama meskipun berbeda bentuk. Karena pembahasan graf tidak berarah dan tidak berbobot maka bentuk, arah dan panjang pendek suatu rusuk tidak dipermasalahkan. Dengan demikian, gambar (a) dapat diwakili oleh gambar (b). Akibatnya, dengan menggunakan hasil langkah (i) atau (ii), diperoleh kesimpulan bahwa pada posisi (iii) tersebut, terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 13

(iv) Untuk $v_4 \in \text{ekst}(J)$ dan $v_5 \in \text{ekst}(J)$

Pada posisi (iv) dibuktikan dengan cara analog sebagaimana pembuktian langkah (iii). Akhir pembuktian (iv) dapat diketahui bahwa untuk posisi $v_4 \in \text{ekst}(J)$ dan $v_5 \in \text{ekst}(J)$ terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 14

Berdasarkan hasil (i), (ii), (iii) dan (iv), dapat disimpulkan bahwa pada penggambaran di bidang datar dari K_5 , terdapat perpotongan rusuk-rusuknya. Jadi, graf lengkap K_5 adalah graf tidak planar.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $K_{3,3}$ adalah graf tidak planar. Untuk membuktikan $K_{3,3}$ dengan menggunakan konsep pembuktian Kurva Jordan maka dibuktikan analog dengan cara pembuktian K_5 . Akan diberikan langkah-langkah yang dapat digunakan sebagai acuan dalam membuktikan $K_{3,3}$ suatu graf takplanar.

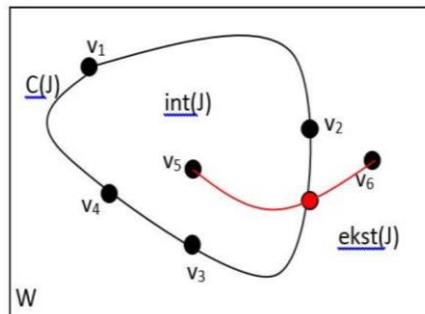
Langkah-langkah pembuktian $K_{3,3}$, sebagai berikut :

1). Bentuk kurva jordan, $C(J)$ dengan 4 simpul dan 4 rusuk. Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_9\}$, ingat $m = |E(K_n)| = 3 \cdot 3 = 9$. Karena 6 simpul diambil 4 simpul maka terdapat $C(6,4)$ banyaknya, yaitu 15 kemungkinan kurva Jordan. Dengan tanpa mengurangi keumumannya, dipilih $C(J) = v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$ untuk pembuktian pilihan yang lain, dibuktikan secara analog. Dalam hal ini, $C(J)$ berbentuk sikel v_1-v_1 , lintasan tertutup yang terbentuk barisan simpul dan rusuk.

2) Dua simpul tersisa, yaitu v_5 dan v_6 ditempatkan pada semua kemungkinan, yaitu sebagai berikut :

i. $v_5 \in \text{int}(J)$ dan $v_6 \in \text{ekst}(J)$

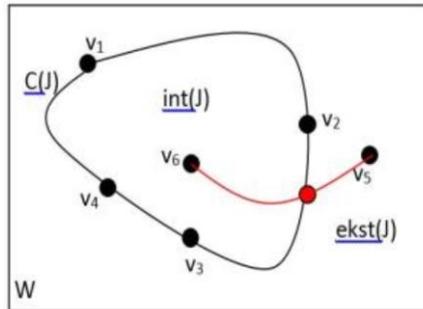
Pada kasus ini, diketahui kurva Jordan $C(J) = v_1, v_2, v_3, v_4, v_1$ dan $v_5 \in \text{int}(J)$ dan $v_6 \in \text{ekst}(J)$. Karena v_5 dan v_6 terletak pada daerah yang berbeda pada $C(J)$ maka menurut sifat $C(J)$ setiap garis yang menghubungkan v_5 dan v_6 akan memotong kurva di beberapa titik. Tinggal ditunjukkan bahwa ada rusuk yang menghubungkan (hadir) v_5 dan v_6 . Berdasarkan graf $K_{3,3}$ maka v_5 dan v_6 berikatan sehingga terdapat rusuk v_5v_6 . Menurut sifat $C(J)$ maka rusuk v_5v_6 akan memotong $C(J)$ di beberapa titik. Kesimpulan, untuk posisi $v_5 \in \text{int}(J)$ dan $v_6 \in \text{ekst}(J)$ maka terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 15

Berdasarkan hasil ini, belum bisa disimpulkan tentang planaritas $K_{3,3}$ karena semua kemungkinan belum diperiksa. Maka akan dilanjutkan untuk memeriksa posisi dari v_5 dan v_6 yang lain.

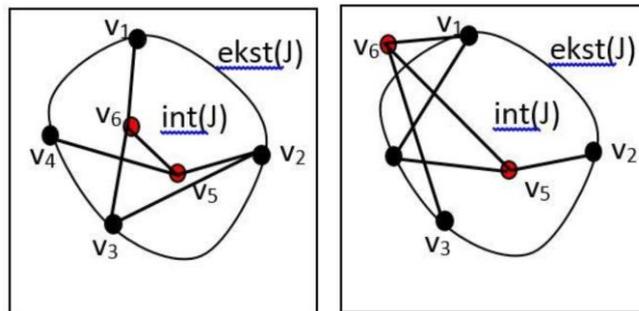
(ii) Untuk $v_5 \in \text{ekst}(J)$ dan $v_6 \in \text{int}(J)$. Kondisi ini adalah analog dengan kondisi (i). Maka didapat $C(J)$, v_5 dan v_6 terletak pada daerah yang berbeda pada $C(J)$ dan rusuk $v_5v_6 = \text{rusuk } v_5v_6$ karena graf tidak berarah. Akibatnya rusuk v_5v_6 akan memotong kurva $C(J)$ di beberapa titik, sehingga terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 16

(iii) Untuk $v_5 \in \text{int}(J)$ dan $v_6 \in \text{int}(J)$.

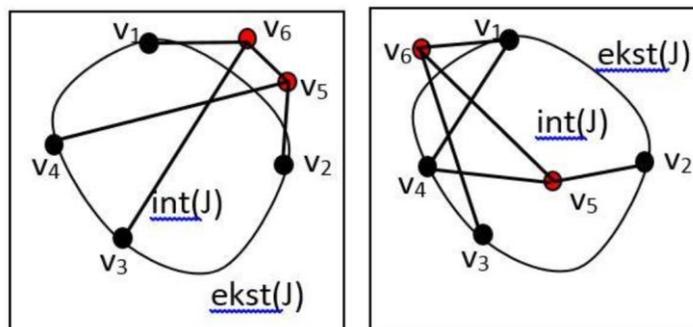
Pada posisi ini, $C(J)$ dan letak v_5 dan v_6 dapat divisualkan sebagai berikut. Kalau dilengkapkan diperoleh graf $K_{3,3}$, yaitu pada (a) terlihat v_5 dan v_6 terletak pada $\text{int}(J)$, tetapi dengan menggeser posisi v_5 diperoleh graf $K_{3,3}^*$ yang isomorfik dengan $K_{3,3}$, dengan posisi v_5 terletak di $\text{ekst}(J)$, yang berbeda daerah dengan v_6 . Diketahui bahwa dua graf isomorfis jika kedua graf memiliki struktur yang sama meskipun berbeda bentuk. Karena pembahasan graf tidak berarah dan tidak berbobot maka bentuk, arah dan panjang pendek suatu rusuk tidak dipermasalahkan. Dengan demikian, gambar (a) dapat diwakili oleh gambar (b). Akibatnya, dengan menggunakan hasil langkah (i) atau (ii), diperoleh kesimpulan bahwa pada posisi (iii) tersebut, terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 17

(iv) Untuk $v_5 \in \text{ekst}(J)$ dan $v_6 \in \text{ekst}(J)$

Pada posisi (iv) dibuktikan dengan cara analog sebagaimana pembuktian langkah (iii). Akhir pembuktian (iv) dapat diketahui bahwa untuk posisi $v_5 \in \text{ekst}(J)$ dan $v_6 \in \text{ekst}(J)$ terdapat perpotongan rusuk-rusuknya.



Gambar 18

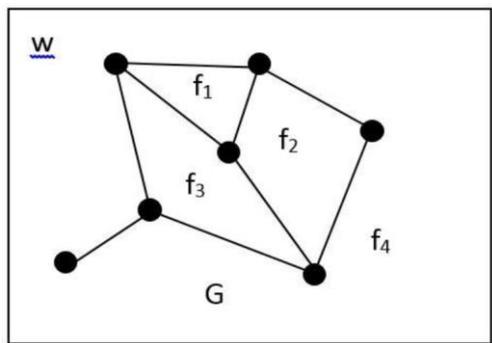
Berdasarkan hasil (i), (ii), (iii) dan (iv), dapat disimpulkan bahwa pada setiap penggambaran di bidang datar dari $K_{3,3}$, terdapat perpotongan rusuk-rusuknya. Jadi, graf lengkap $K_{3,3}$ adalah graf tidak planar.

Pembuktian dengan menggunakan metode kurva Jordan memiliki beberapa kelemahan, antara lain : (1) bukti terlalu panjang karena setiap kemungkinan posisi harus diperiksa, (2) pada langkah 3 dan 4, yaitu v_5 dan v_6 terletak pada daerah yang sama baik di $\text{int}(J)$ atau $\text{ekst}(J)$, langkah pembuktiannya kurang jelas dan logis.

Penggunaan Pertidaksamaan Euler

Untuk membuktikan planaritas K_5 dan $K_{3,3}$ dengan menggunakan Teorema Pertidaksamaan Euler, dibutuhkan beberapa fakta yang dapat digunakan untuk membantu dalam pembuktian awalnya. Hubungan antara banyak simpul, banyak rusuk dan banyaknya muka dalam suatu graf bidang memberikan andil yang besar dalam mempermudah proses pembuktian. Peran yang tidak kalah besar disumbangkan teorema jabat tangan untuk graf bidang yang memberikan hubungan antara banyak rusuk dan banyak muka sehingga dapat dikaitkan ke teorema Euler.

Sebagai contoh, suatu graf bidang yang memiliki panjang siklus minimum 3. dengan panjang siklus minimum adalah 3 sehingga siklus dengan panjang tiga adalah siklus terkecil. Maka didapat derajat setiap muka-nya adalah lebih besar atau sama dengan 3.



Gambar 19

Pada Gambar 19, diketahui bahwa Graf G, dengan $|V(G)|=7$, $|E(G)|=9$ dan $|F(G)|=4$, dengan $der(f_1)=3$, $der(f_2)=4$, $der(f_3)=4$, $der(f_4)=7$. Karena G memuat siklus segitiga maka didapat bahwa $der(f_i) \geq 3$, untuk setiap $i, i=1,2,3,4$. Sedangkan, jika G tidak memuat siklus segitiga maka $der(f_i) \geq 4$. Akan disajikan teorema yang dapat digunakan untuk membuktikan K_5 suatu graf tidak planar.

Teorema 3

Jika G suatu graf planar, terhubung, sederhana, dengan $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$, dengan $n \geq 3$ maka berlaku $m \leq 3n-6$.

Ekuivalensi dari Teorema 3 adalah kontraposisinya, yaitu *Jika G suatu graf terhubung, sederhana dengan $m > 3n-6$ maka G tidak planar*

Bukti.

Telah difahami bahwa graf K_5 adalah suatu graf yang teratur-4 dan setiap pasang simpulnya berikatan. Karena K_5 memuat siklus segitiga sehingga didapat $der(f_i) \geq 3$, untuk setiap i . Menurut teorema jabat tangan, diperoleh

$$\Leftrightarrow \sum der(f_i) = 2m.$$

$$\Leftrightarrow \sum 3 \leq \sum der(f_i) = 2m.$$

$$3f = \sum 3 \leq \sum der(f_i) = 2m.$$

Jadi, $f \leq \frac{2}{3} m$ (i)

Berdasarkan teorema Euler, didapat $n - m + f = 2$

$$\Leftrightarrow f = m - n + 2 \quad \text{(ii).}$$

Dengan menggunakan hasil pada (i) dan (ii), diperoleh

$$m - n + 2 = f \leq \frac{2}{3} m$$

$$\Leftrightarrow m - \frac{2}{3} m \leq n - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} m \leq n - 2$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3n - 6.$$

Berdasarkan data pada K_5 , diketahui

$$n = 5, m = \frac{1}{2} 5 \cdot 4 = 10 \text{ sehingga}$$

$$m = 10 > 3n - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9.$$

Karena $m > 3n - 6$ maka menurut akibat Teorema 3 didapat K_5 adalah suatu graf tidak planar (Little & Sanjiuth, 2010).

Jika Teorema 3 diterapkan pada $K_{3,3}$ ternyata tidak memberi keputusan apa-apa. Berdasarkan fakta, $K_{3,3}$ suatu graf yang mempunyai $n = 6, m = 3 \cdot 3 = 9$ dan $m = 9 \leq 3n - 6 = 3 \cdot 6 - 6 = 12$. Dengan demikian, $m \leq 3n - 6$ terpenuhi oleh $K_{3,3}$ sehingga tidak dapat menyimpulkan tentang planaritasnya. Hal itu terjadi karena teorema tersebut hanya syarat perlu, bukan syarat perlu dan cukup.

Artinya, Teorema 3 tidak dapat digunakan untuk menentukan planaritas $K_{3,3}$ sehingga harus dibuktikan dengan teorema lain.

Setelah diamati dengan seksama, terdapat perbedaan karakteristik antara K_5 dan $K_{3,3}$, antara lain $K_{3,3}$ tidak memuat sikel segitiga tetapi sikel terkecilnya adalah segiempat. Akibatnya diperoleh teorema lain yang dapat menentukan planaritas $K_{3,3}$, sebagaimana tersaji berikut.

Teorema 4

Jika G suatu graf planar, terhubung, sederhana, dengan $|V(G)|=n, |E(G)|=m$, dengan $n \geq 3$ dan tidak memuat sikel segitiga maka berlaku $m \leq 2n - 4$.

Ekuivalensi dari Teorema 4 adalah kontraposisinya, yaitu *Jika G suatu graf terhubung, sederhana dan tidak memuat sikel segitiga, dengan $m > 2n - 4$ maka G tidak planar*

Bukti.

Telah diketahui bahwa graf bipartit lengkap $K_{3,3}$ adalah suatu graf yang teratur-3. Karena $K_{3,3}$ tidak memuat sikel segitiga dan memuat sikel terkecilnya adalah segiempat sehingga didapat $\text{der}(f_i) \geq 4$, untuk setiap i . Menurut teorema jabat tangan, diperoleh

$$\Leftrightarrow \sum \text{der}(f_i) = 2m.$$

$$\Leftrightarrow \sum 4 \leq \sum \text{der}(f_i) = 2m.$$

$$4f = \sum 4 \leq \sum \text{der}(f_i) = 2m.$$

$$\text{Jadi, } f \leq \frac{1}{2} m. \quad (\text{i})$$

Berdasarkan teorema Euler, didapat

$$n - m + f = 2$$

$$\Leftrightarrow f = m - n + 2 \quad (\text{ii}).$$

Dengan menggunakan hasil pada (i) dan (ii), diperoleh

$$m - n + 2 = f \leq \frac{1}{2} m$$

$$\Leftrightarrow m - \frac{1}{2} m \leq n - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m \leq n - 2$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2n - 4.$$

Berdasarkan data pada $K_{3,3}$, diketahui

$$n = 6, m = 3 \cdot 3 = 9 \text{ sehingga}$$

$$m = 9 > 2n - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8.$$

Karena $m > 2n - 4$ maka menurut akibat Teorema 4 didapat $K_{3,3}$ adalah suatu graf tidak planar (Wilson & Watkins, 1990).

Akibat dari Teorema 3 dan Teorema 4, adalah

Jika $n \leq 4$ maka K_n adalah planar

Jika $n \geq 5$ maka K_n adalah tidak planar

Jika $n_1 \leq 2$ atau $n_2 \leq 2$ maka K_{n_1, n_2} adalah planar

Jika $n_1, n_2 \geq 3$ maka K_{n_1, n_2} adalah tidak planar

Jika G suatu graf planar maka setiap subgraf dari G adalah planar

Jika G suatu graf tidak planar maka setiap graf yang memuat G adalah tidak planar

Teorema Perluasan Pertidaksamaan Euler

Hasil pengamatan terhadap graf K_5 dan $K_{3,3}$ diketahui bahwa K_5 adalah graf teratur-4, setiap dua simpulnya berikatan dan terbentuk atas siklus-siklus dengan panjang siklus 3, 4 dan 5 sehingga panjang siklus minimumnya adalah 3. Sedangkan $K_{3,3}$ adalah graf teratur-3, terbentuk atas siklus-siklus dengan panjang siklus 4 dan 6 sehingga panjang siklus minimumnya adalah 4.

Berdasarkan karakteristik dari K_5 dan $K_{3,3}$ maka unsur yang dijadikan sebagai variabel pembentuk dari K_5 dan $K_{3,3}$ adalah siklus dengan panjang terpendeknya. Untuk graf K_3 adalah siklus segitiga dan untuk graf $K_{3,3}$ adalah siklus segiempat.

Jika dimisalkan k adalah panjang siklus terpendek dari graf G maka $k \geq 3$. Dengan menggunakan sifat perluasan teorema jabat tangan untuk bidang dan mengkombinasikan dengan teorema Euler akan diperoleh teorema perluasan pertidaksamaan Euler. Teorema ini mampu membuktikan planaritas graf K_5 dan graf $K_{3,3}$ secara langsung melalui kontraposisinya. Secara lengkap, tersaji dibawah ini.

Teorema 5 (Perumuman Pertidaksamaan Euler)

Jika G suatu graf planar, terhubung, $|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$ dan panjang siklus terpendeknya adalah k , dengan $k \geq 3$ maka berlaku $m \leq \frac{k}{(k-2)}(n-2)$.

Ekuivalensi dari Teorema 5 adalah kontraposisinya, yaitu Jika G suatu graf, terhubung, panjang siklus terpendeknya k dengan $m > \frac{k}{(k-2)}(n-2)$ maka G graf tidak planar

Bukti.

Karena graf G memiliki panjang siklus terpendeknya k maka $k \geq 3$ dan $\text{der}(f_i) \geq k$, untuk setiap i . Menurut teorema jabat tangan, diperoleh

$$\Leftrightarrow \sum \text{der}(f_i) = 2m.$$

$$\Leftrightarrow \sum k \leq \sum \text{der}(f_i) = 2m.$$

$$kf = \sum k \leq \sum \text{der}(f_i) = 2m.$$

$$\text{Jadi, } f \leq \frac{2}{k} m \quad (\text{i})$$

Berdasarkan teorema Euler, didapat

$$n - m + f = 2$$

$$\Leftrightarrow f = m - n + 2 \quad (\text{ii}).$$

Dengan menggunakan hasil pada (i) dan (ii), diperoleh

$$m - n + 2 = f \leq \frac{2}{k} m$$

$$\Leftrightarrow m - \frac{2}{k} m \leq n - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k-2)}{k} m \leq n - 2$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{k}{(k-2)}(n-2).$$

Untuk menggunakan Teorema 5, maka harus diketahui panjang siklus terpendeknya dari graf tersebut, kemudian disubstitusikan ke teorema dan diperoleh teoremnya, baru digunakan.

Contoh-1

Untuk K_5 , maka diketahui $k=3$, sehingga didapat teoremnya, yaitu "Jika G suatu graf planar, terhubung, panjang siklus terpendeknya adalah 3 maka $m \leq 3n-6$. Dengan menggunakan kontraposisi diperoleh : Jika G suatu graf terhubung, $k=3$ dan $m > 3n-6$ maka G graf tidak planar.

Pada K_5 , didapat $n=5$, $m=10$, $3n-6=9$ sehingga berlaku $m=10 > 3n-6=9$, jadi K_5 graf tidak planar.

Untuk $K_{3,3}$, maka diketahui $k=4$, sehingga didapat teoremnya, yaitu "Jika G suatu graf planar, terhubung, $\text{pst}(G)=4$ maka $m \leq 2n-4$

Untuk Graf Peterson, maka diketahui $k=5$, sehingga didapat teoremanya, yaitu Jika G suatu graf planar, terhubung, $pst(G)=5$ maka $m \leq \frac{5}{3}(n-2)$. Kontraposisi nya : Jika G suatu graf terhubung, $k=5$ dan $m > \frac{5}{3}(n-2)$ maka G graf tidak planar. Berdasarkan data pada graf Petersen, diketahui

$$n = 10, m = \frac{1}{2} 10 \cdot 3 = 15 \text{ sehingga}$$

$$m = 15 > \frac{5}{3}(n-2) = \frac{5}{3} 8 = 13\frac{1}{3}.$$

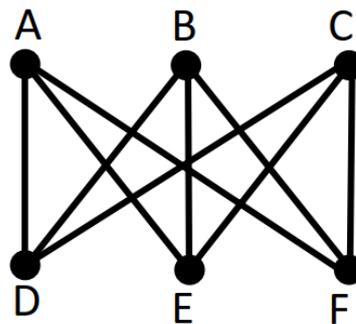
Karena $m > \frac{5}{3}(n-2)$ maka menurut kontraposisi Teorema 5 didapat graf Petersen adalah suatu graf tidak planar.

Contoh-2

Seorang pengembang perumahan mendapat order untuk membangun 3 rumah hunian yang masing-masing memiliki fasilitas pokok yang sama, yaitu air, listrik dan gas. Pengguna meminta untuk harga standart dan terjamin keamanannya.

Apakah pengembang tersebut akan menerima order tersebut dengan syarat yang Analisis Masalah.

Berdasarkan order dan fasilitas pokok yang dimiunta maka permasalahan dapat dimodelkan ke bentuk graf bipartet lengkap $3, 3$ yaitu $K_{3,3}$ dengan simpul A, B dan C mewakili rumah dan simpul D, E, dan F masing-masing mewakili fasilitas air, listrik dan gas. Sedangkan rusuk mewakili kebutuhan rumah terhadap fasilitas pokok dan rusuk yang digunakan adalah pipa, sehingga dapat disajikan secara graf, sebagai berikut.



Gambar 20

Menurut karakteristik graf $K_{3,3}$ adalah graf tidak planar sehingga selalu terdapat perpotongan rusuk-rusuknya. Dari sisi lain bahwa rusuk berbentuk pipa dan memuat bahan air, listrik atau gas sehingga mendatangkan resiko jika bertemu. Akibatnya, pengembang tidak akan bisa memenuhi permintaan pemesan yaitu rumah yang aman. Setiap desain rangkaian sirkuit pada papan sirkuit tercetak (*printed circuit board*) tidak terdapat perpotongan rangkaian sirkuitnya karena akan berdampak konsleting. Maka desain rangkaian sirkuit pada PCB menggunakan konsep graf planar.

SIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan diperoleh dua kesimpulan. Pertama, bahwa planaritas K_5 dan graf $K_{3,3}$ memiliki peran besar untuk menentukan planaritas graf-graf terkait. Sedangkan kesimpulan kedua adalah dibutuhkan adanya teorema generalisasi yang mampu membuktikan K_5 dan graf $K_{3,3}$ secara langsung serta dapat digunakan untuk membuktikan graf-graf lain yang terkait. Untuk penulisan artikel selanjutnya dapat dikembangkan sifat-sifat graf yang berdasarkan teorema Kurotovski sehingga didapat teorema lain untuk membuktikan planaritas suatu graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Aldous, J. M. & Robin J. W. (2004). Graph and Applications: an Introductory Approach. Great Britian: Springer
- Anitha, T., Rajkumar, R. (2020). Characterization of groups with planar, toroidal or projective planar (proper) reduced power graphs. Journal of Algebra and Its Applications Vol. 19, No. 05, 2050099 (2020). <https://doi.org/10.1142/S0219498820500991>

- Balakrishnan, V. K. (1997). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Graph Theory*, The McGraw-Hill Companies, Inc., New York.
- Behzad, M., Chartrand, G. & Lesniak, Foster, L. (1979). *Graphs and Digraphs*, Boston:Prindle, Weber and Schmidt
- Bondy, J. A. & Murty, U. S. R., (1979). *Graphs Theory With Applications*, New York : North-Holland
- Busacker, R.G. & Saaty, T.L., (1965). *Finite Graphs and Network: An Introduction With Application*, McGraw-Hill Book Companies, New York.
- Capobianco, M. & Mollezzo, J. C. (1977). *Examples and Counterexamples in Graohs Theory*, New York, North-Holland
- Chartrand, G. (1977). *Graph as Mathematical Models*, Boston, Prindle, Weber and Schmidt
- Chartrand, G. & Zhang, P. (2005). *Introduction to graph Theory*, Mc Graw-Hill Press: Boston.
- Giordano, D. L., Giuseppe, D. B. & Frati, F., (2020). Extending upward Planar Graph Drawing. *Computational Geometry*, Volume 91, December 2020, 101668, <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2020.101668>
- Harary, F. (1983). *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969. M. Borowiecki et al., eds., *Lecture Notes in Math.* 1018, Springer, Berlin, 1983, pp. 1–13.
- Holton, D. A. & Sheehan, J. (1993). *The Petersen Graph*, Cambridge UniversityPress, Cambridge.
- Hu, Y., (2010). New Proof of Some Properties about Petersen Graph, *Second International Workshop on Wuhan*.
- Juneidi, G. & Humuntal, B. (2016). Graf Petersen Dengan Beberapa Sifat-sifat yang Berkaitan Dalam Teori Graf. *Karismatika-ISSN : 2443 – 0366 Tahun 2 Vol. 2, No. 1, April 2016*
- Kosta, D & Zoran, P, (2015). A Planarity Criterion For Graphs. *SIAM J. Discrete Math, Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 29, No. 4, pp. 2160-2165
- Kumar, S., Tiziana, D. M., & Anindya, S. C. (2020). Disentangling shock diffusion on complex networks: identification through graph planarity. *Journal of Complex Networks*, Volume 8, Issue 3, June. <https://doi.org/10.1093/comnet/cnaa023>
- Liu, C. L. (1985). *Elements of Discrete Mathematics*. New York: McGraw-Hill)
- Liu, C. L., (1968). *Introduction to Combinatorial Mathematics*, New York, McGraw-Hill
- Little, C.H.C. & Sanjith, G. (2010). Another Characterisation of Planar Graphs, *Electron. J. Combin.*, 17, 15.
- Maehara, R. (1984). The Jordan curve theorem via the rouwer fixed point theorem, *Amer. Math. Monthly*, 91 (1984), pp. 641–643.
- Mahbouble, N., Ahmad, E., & Abbas, M. (2018). Connectivity and planarity of gg-non commuting graph of finite groups. *Journal of Algebra and Its Applications* Vol. 17, No. 06, 1850107. <https://doi.org/10.1142/S0219498818501074>
- Mott, Joe, L., (1986). *Discrete Mathematuics for Computer Scientist and Mathematicians*, Prentice-Hall, Englewood Clifft, NJ 07632
- Munir, R. (2005). *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Bandung: Informatika.
- Munir, R. (2012). *Matematika Diskrit Logika, Himpunan, Matriks, Relasi, Fungsi, Algoritma, Kombinatorial, Peluang Diskrit Edisi Kelima*. Bandung : Informatika
- Patrizio, A., Giordano, D.L., Giuseppe, D. B., Fabrizio, F.M., & Ignaz, R. (2020). Beyond level planarity: Cyclic, torus, and simultaneous level planarity. *Theoretical Computer Science*, Volume 804, 12 January 2020, Pages 161-170, <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.11.024>

- Patrizio, A. M., Michael, A. B., Franz, J.B., & (2020). Simple k -planar graphs are simple $(k + 1)$ -quasiplanar. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Volume 142, May 2020, Pages 1-35. <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2019.08.006>
- Schaefer, M. (2021). Complexity of Geometric k -Planarity for Fixed k . *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 25, no. 1, pp. 29-41, DOI: 10.7155/jgaa.00548
- Siang, J. J. (2006). *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta
- Skopenkov, A. B. (2005). Skopenkov, Around the Kuratowski graph planarity criterion, *Mat. Prosveshchenie*, 9 (2005), pp. 116–118; Erratum 10 (2006), pp. 276–277; Addendum (with A.S. Telishev) 11 (2007), pp. 159–160 (MCCME, Moscow).
- Sugeng, M., & Emut, (2010). *Teori Graf*, Universitas Terbuka, Jakarta.
- Thomassen, C. (1981). Kuratowski's theorem, *J. Graph Theory*, 5, pp. 225–241.
- Walter, D., Michael, K., Giuseppe, L., & Giacomo, O. (2021). Rectilinear Planarity Testing of Plane Series-Parallel Graphs in Linear Time. *International Symposium on Graph Drawing and Network Visualization, GD 2020: Graph Drawing and Network Visualization*, pp. 436–449, DOI: 10.1007/978-3-030-68766-3_34
- Wilson, R.J. & Watkins, J.J., (1990). *Graph: An Introduction Approach: A First Course In Discrete Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Wilson, R.J. (2010). *Pengantar Teori Graf*, Edisi kelima, Erlangga, Jakarta
- Yu. Makarychev, A short proof of Kuratowski's graph planarity criterion, *J. Graph Theory*, 25 (1997), pp. 129–131.