PYTHAGORAS Vol. 7, No. 1, Juni 2012

PEMBENTUKAN SIGMA DELTA DAN IDEAL PRIM DARI GELANGGANG POLINOM MIRING

Amir Kamal Amir

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin (UNHAS)
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar 90245, Indonesia
amirkamalamir@yahoo.com

Abstrak

Gelanggang polinom miring, disimbolkan dengan $R[x;\sigma,\delta]$, dalam peubah tak diketahui x adalah gelanggang yang terdiri dari polinom seperti $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ yang memenuhi aturan perkalian: $xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in R$. Bentuk operasi perkalian gelanggang polinom di atas mengindikasikan bahwa gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ bukan gelanggang komutatif meskipun gelanggang R adalah gelanggang komutatif. Sifat tidak komutatif ini sangat berpengaruh pada bentuk-bentuk ideal gelanggang polinom miring tersebut. Tujuan dari penelitian ini adalah merancang σ dan δ pada $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right]$ agar $R[x;\sigma,\delta]$ merupakan gelanggang polinom miring. Setelah itu, akan dirancang ideal prim dari $R[x;\sigma,\delta]$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode adaptasi dan eksploitasi pada teori-teori yang sudah ada. Strategi yang ditempuh adalah mencari (σ,δ)-prim dari gelanggang R yang dapat dikembangkan menjadi ideal prim di $R[x;\sigma,\delta]$. Dari hasil penelitian diperoleh

$$\left\{a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \mid a, b \in 5\mathbb{Z}\right\}$$

adalah (σ,δ)-prim dari R dan $PR[x;\sigma,\delta]$ adalah ideal prim dari $R[x;\sigma,\delta]$.

Kata-kata kunci: *delta, sigma, ideal, differensial, gelanggang, polinom*

Abstract

Let R be any ring with identity *1*, σ be an endomorphism of R and δ be a left σ-derivation. The skew polynomial ring over R in an indeterminate x, denoted by $R[x;\sigma,\delta]$, is the set of polynomils $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ where $a_i \in R$ with multiplication rule $xa = \sigma(a)x + \delta(a), \forall a \in R$ for all $a \in R$. Multiplication rule shows that the skew polynomial ring $R[x;\sigma,\delta]$ is a noncommutative ring although R is commutative. The noncommutative properties is very influential on the ideal forms of the skew polynomial ring. The purpose of this research is to design σ dan δ on $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right]$ such that $R[x;\sigma,\delta]$ is a polynomial ring. After that, will be designed prime ideal of $R[x;\sigma,\delta]$. The method used in this research is a method of adaptation and exploitation of the theories that already exist.
The strategy adopted is to find (σ, δ)-prime ideal in ring R that can be developed into a prime ideal in $R[x;\sigma,\delta]$. From the results obtained

$$\left\{a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \mid a, b \in 5\mathbb{Z}\right\}$$

is (σ,δ)-prime ideal in R and $PR[x;\sigma,\delta]$ is prime ideal in $R[x;\sigma,\delta]$.

Keywords: *delta, sigma, ideal, differential, ring, polynomial.*

1. PENDAHULUAN

Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom dengan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif. Dalam teori sistem kontrol, gelanggang polinom miring digunakan untuk mentransfer sistem kontrol klasik ke dalam sistem kontrol linier abstrak (aljabar). Selanjutnya pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier diterjemahkan menjadi pengkajian struktur, sifat, dan kelakuan sistem linier abstrak terkait, misalnya dengan memanfaatkan pengetahuan aljabar. Dengan demikian, pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier, yang banyak digunakan dalam dunia aplikasi akan sangat terbantu jika kita mengetahui dengan baik sifat-sifat dan struktur gelanggang polinom miring tersebut.

Untuk pembentukan suatu gelanggang polinom miring diperlukan beberapa hal, yaitu suatu gelanggang (gelanggang ini biasanya disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring), endomorfisma gelanggang (endomorfisma ini biasanya disimbolkan dengan σ (sigma)), dan derivatif gelanggang (derivatif ini biasanya disimbolkan δ (delta)). Secara lengkap pengertian gelanggang polinom miring dibahas dalam Goodearl dan Warfiled (1989) dan McConnel dan Robson (1987). Misalkan R suatu gelanggang, σ suatu endomorfisma di R, dan δ suatu σ-derivatif, yaitu:

1. δ suatu endomorfisma grup di R.
2. $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(ab)$

   untuk setiap $a, b \in R$.

Gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ dalam variabel tak diketahui x berisi semua polinom dengan koefisien di R yang memenuhi aturan perkalian sebagai berikut: untuk setiap $a \in R$ berlaku $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Salah satu hal yang menarik untuk dikaji dari suatu gelanggang adalah bentuk-bentuk idealnya. Dalam gelanggang polinom miring dikenal bentuk ideal yang lebih khusus, yaitu (σ, δ)-ideal (sigma delta ideal). Pada sisi lain, memperhatikan bentuk perkalian polinom-polinom dalam gelanggang polnom miring, telihat bahwa gelanggang ini bukan gelanggang komutatif. Sifat komutatif ini akan mempengaruhi bentuk atau pembentukan (σ, δ)-ideal dari gelanggang polinom miring tersebut.

Memperhatikan sekali lagi bentuk gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ terlihat bahwa gelanggang polinom miring ini sangat terkait dengan gelanggang tumpuannya, yaitu R. Dengan demikian, bentuk ideal dari gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ juga akan sangat terkait dengan bentuk ideal dari gelanggang tumpuan R. Pada paper ini akan diuraikan pembentukan (σ, δ)-ideal dari gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ yang dikonstruksi dari ideal gelanggang tumpuan R, dengan gelanggang

$R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right] = \left\{a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$, dengan $i^2 = -1$ dan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Pada pembahasan selanjutnya yang dimaksud R adalah R seperti yang didefinisikan pada baris di atas.

2. PEMBAHASAN

Pembentukan ideal gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$ yang dikonstruksi dari (σ, δ)-ideal dari gelanggang tumpuan R, akan dibagi dalam beberapa tahap. Tahap pertama adalah pembentukan gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$. Dalam hal ini akan dikonstruksi endomorfisma σ dan σ-derivatif δ pada gelanggang $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right]$. Tahap kedua pencarian bentuk ideal prim dari gelanggang R. Ideal prim ini akan menjadi cikal bakal dari (σ, δ)-ideal. Tahap ketiga adalah pembentukan (σ, δ)-ideal dari ideal prim dari ideal prim yang telah diperoleh sebelumnya. Tahap terakhir adalah pembentukan ideal gelanggang polinom miring menggunakan (σ, δ)-ideal prim.

2.1. Pembentukan Gelanggang Polinom Miring

Untuk pembuktian tahap pertama, misalkan $a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \in R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right]$ dan definisikan

$$\sigma\left(a + b\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right) = (a + b) - b\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \text{ dan}$$

$$\delta\left(a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right) = b.$$

Teorema 1.

Pemetaan σ dan δ yang didefinisikan seperti di atas berturut-turut merupakan suatu endomorfisma dan σ-derivatif pada $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right]$.

Bukti:

Misalkan $a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)$, $c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \in R$, dengan kalkulasi sederhana kesamaan-kesamaan berikut diperoleh.

$$\sigma\left[\left(a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right) + \left(c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right] = \sigma\left[(a + b) + \left((c + d)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right]$$

$$= (a + b + c + d) - (c + d)\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right) = \sigma\left(a + b\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right) + \sigma\left(c + d\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right).$$

$$\sigma\left[\left(a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\left(c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right] = \sigma\left[(ac - bd) + \left((ad + bc + bd)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right]$$

$$= \left((a + b) - b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\left((c + d) - d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right) = \left[\sigma\left(a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right]\left[\sigma\left(c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right].$$

Langkah-langkah ini membuktikan bahwa σ adalah endomorfisma pada R. Selanjutnya,

$$\delta\left[\left(a+b\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\left(c + d\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right]$$

$$= \delta\left[(ac-bd) + \left((ad+bc + bd)\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right]$$

$$= ad+bc+bd$$

$$= \left[(a+b) - b\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right]d + b\left[c+d\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right] =$$

$$\sigma\left(a+b\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\delta\left(c+d\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)+\delta\left(a+b\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\left(c+d\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right).$$

Langkah ini membuktikan bahwa δ adalah suatu σ −derivatif pada R. ■

Menggunakan pemetaan σ dan δ yang disajikan dalam Teorema 1, maka berdasarkan Goodearl dan Warfiled (1989) dan McConnel dan Robson (1987) disimpulkan bahwa $R[x;\sigma,\delta]$ merupakan gelanggang polinom miring.

2.2. Ideal Prim dari *R*

Langkah selanjutnya adalah mencari ideal prim dari R. Sebelum pencarian dilakukan, terlebih dahulu disajikan definisi ideal prim sebagai penyegaran.

Definisi 1.[Spindler, 1994].
Misalkan R' adalah gelanggang komutatif dan $I \neq R'$ adalah suatu ideal dari R'. I disebut ideal prim jika $ab \in I$ mengakibatkan $a \in I$ atau $b \in I$.

Teorema 2.
Himpunan $P = \left\{a+b\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \mid a,b \in 5\mathbb{Z}\right\}$ merupakan ideal prim dari R.

Bukti:
Untuk membuktikan bahwa P adalah ideal dari R cukup sederhana dan dapat dilihat dalam Fraleigh (1994) sehingga pembuktiannya tidak disajikan. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa P adalah ideal prim dari R. Untuk membuktikan hal ini digunakan Definisi 1. Misalkan

$a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \notin R$ dan $c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \notin R$, akan ditunjukkan bahwa $\left[\left(a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\left(c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right] \notin R$. Jika $a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \notin R$ dan $c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \notin R$, maka ada sembilan kemungkinan, yaitu:

1. $a \notin 5\mathbb{Z}$, $b \notin 5\mathbb{Z}$, $c \notin 5\mathbb{Z}$, dan $d \notin 5\mathbb{Z}$,
2. $a \notin 5\mathbb{Z}$, $b \notin 5\mathbb{Z}$, $c \notin 5\mathbb{Z}$, dan $d \in 5\mathbb{Z}$,
3. $a \notin 5\mathbb{Z}$, $b \in 5\mathbb{Z}$, $c \notin 5\mathbb{Z}$, dan $d \notin 5\mathbb{Z}$,
4. $a \notin 5\mathbb{Z}$, $b \in 5\mathbb{Z}$, $c \notin 5\mathbb{Z}$, dan $d \in 5\mathbb{Z}$,
5. $a \notin 5\mathbb{Z}$, $b \notin 5\mathbb{Z}$, $c \in 5\mathbb{Z}$, dan $d \notin 5\mathbb{Z}$,
6. $a \notin 5\mathbb{Z}$, $b \in 5\mathbb{Z}$, $c \in 5\mathbb{Z}$, dan $d \notin 5\mathbb{Z}$,
7. $a \in 5\mathbb{Z}$, $b \notin 5\mathbb{Z}$, $c \notin 5\mathbb{Z}$, dan $d \notin 5\mathbb{Z}$,
8. $a \in 5\mathbb{Z}$, $b \notin 5\mathbb{Z}$, $c \notin 5\mathbb{Z}$, dan $d \in 5\mathbb{Z}$,
9. $a \in 5\mathbb{Z}$, $b \notin 5\mathbb{Z}$, $c \in 5\mathbb{Z}$, dan $d \notin 5\mathbb{Z}$.

Pada sisi lain,

$$\left(a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\left(c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc + bd)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right).$$

Memperhatikan hasil perkalian di atas dan dengan menggunakan pengetahuan teori bilangan dapat ditunjukkan bahwa kesembilan kemungkinan nilai *a, b, c,* dan *d* yang terdaftar di atas akan menghasilkan $\left[\left(a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\left(c + d\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right)\right)\right] \notin R$. Dengan demikian, menggunakan kontraposisi dari Definisi 1 terbukti bahwa *P* adalah ideal prim. ■

2.3. Ideal $(\sigma, \delta) -$ prim dari *R*.

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa ideal *P* yang dibentuk di atas merupakan ideal $(\sigma, \delta) - \text{prim}$ dari *R*. Untuk proses pembuktian ini, terlebih dahulu disajikan pengertian $(\sigma,\delta)-$prim.

Defenisi 2 [Goodearl, 1992].

Misalkan S adalah suatu himpunan pemetaan-pemetaan dari R ke R sendiri. S-ideal dari R adalah suatu ideal I dari R sedemikian sehingga $S(I) \subseteq I$ untuk setiap $f \in S$. Suatu S-ideal prim (atau S-prim) adalah suatu S-ideal murni I dari R sedemikian sehingga jika J, K adalah S-ideal yang memenuhi $JK \subseteq I$, maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$.

Untuk pembahasan dalam gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ definisi di atas digunakan untuk kasus $S = \{\sigma\}$, $S = \{\delta\}$, dan $S = \{\sigma,\delta\}$.

Teorema 3.

Ideal $P = \left\{a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \mid a,b \in 5\mathbb{Z}\right\}$ seperti yang didefinisikan pada Teorema 2 merupakan ideal $(\sigma,\delta)-$prim dari R.

Bukti:

Karena $\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3\boldsymbol{i}}\right)\right) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3\boldsymbol{i}}\right),$ maka dengan mudah dapat dilihat bahwa $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{P}) \subseteq \boldsymbol{P}$. Pada sisi lain $\boldsymbol{\delta}\left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3\boldsymbol{i}}\right)\right) = \boldsymbol{b}$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{P}) \subseteq \boldsymbol{P}$. Dengan demikian, berdasarkan Definisi 1, P merupakan $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})-$ideal. Selanjutnya dari bagian 2.1 diketahui bahwa P adalah ideal prim. Jadi, karena P adalah $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})-$prim dan juga ideal prim, maka menggunakan Definisi 2, disimpulkan bahwa P merupakan $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})-$prim. ■

3. Simpulan:

Simpulan yang ditarik dalam peneltian ini menggunakan teorema berikut.

Teorema 4. [Goodearl, 1992]

Misalkan $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{x};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}]$ dengan R adalah gelanggang komutatif dan $\boldsymbol{\sigma}$ adalah automorfisma. Jika I adalah $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})$-prim dari R, maka IT adalah ideal prim dari T. ■

Dari Teorema terakhir diketahui bahwa

$$P = \left\{a + b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right) \mid a, b \in 5\mathbb{Z}\right\}$$

adalah (σ, δ)-ideal prim dari $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3i}\right]$. Pada sisi lain, mudah ditunjukan bahwa σ adalah automorfisma. Dengan demikian, menggunakan Teorema 4 disimpulkan bahwa $PR[x; \sigma, \delta]$ merupakan ***ideal prim*** dari gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$, dimana $PR[x; \sigma, \delta]$ adalah himpunan polinom-polinom yang koefisien-koefisiennya berada adalah himpunan *PR*.

4. DAFTAR PUSTAKA

1. Fraleigh, J.B., 1994, *A First Course in Abstract Algebra,* Addison-Wesley Publishing Company, New York.
2. Goodearl , K.R. 1992. *Prime Ideals in Skew Polynomial Ring and Quantized Weyl Algebras,* J. of Algebra 150, 324-377.
3. Goodearl, K.R dan Warfield, J.R 1989. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Ring,* London Mathematical Society Student Text, 16.
4. McConnell, J.C. & Robson, J.C. 1987. *Noncommutative Noetehrian Rings*, John Wiley and Sons, Inc, Chichester.
5. Spindler, K., 1994. *Abstract Algebra With Applications (Volume II),* Marcel Dekker, INC, New York.