

DISTRIBUSI FUNGSI PARASTATISTIK : TINJAUAN SIFAT-SIFAT TERMODINAMIKA

DISTRIBUTION OF PARASTATISTICS FUNCTIONS: AN OVERVIEW OF THERMODYNAMICS PROPERTIES

R. Yosi Aprian Sari* dan W. S. B. Dwandaru

Jurusan Pendidikan Fisika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta

*email: ryosia@uny.ac.id

diterima 8 September 2015, disetujui 18 September 2015

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui sifat-sifat termodinamika dari sistem parastatistik orde dua. Sifat-sifat termodinamika yang akan dicari antara lain fungsi partisi kanonik lengkap Z dan rerata jumlah partikel N . Sistem parastatistik ini merupakan bentuk yang lebih umum dari jenis distribusi statistik kuantum yang telah dikenal sebelumnya, yaitu Fermi-Dirac (FD) dan Bose-Einstein (BE). Berawal dari kaitan rekursi fungsi partisi kanonik lengkap untuk sistem parastatistik orde dua yang telah diketahui, dijabarkan kaitan-kaitan rekursi untuk beberapa fungsi termodinamika sederhana bagi sistem parastatistik orde dua. Kaitan-kaitan rekursi tersebut kemudian digunakan untuk menghitung fungsi-fungsi termodinamika model sistem partikel identik dengan tingkat energi terbatas yang mirip osilator harmonik. Dari hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwa dari fungsi partisi kanonik lengkap, Z , sistem parastatistik (paraboson dan parafermion) orde dua dapat diturunkan fungsi-fungsi termodinamikanya dan memiliki kemiripan bentuk grafik dengan sistem parastatistik orde satu (Boson dan Fermion). Kemiripan bentuk grafik ini menunjukkan sifat-sifat termodinamikanya sama.

Kata kunci: parastatistik, sifat-sifat termodinamika

Abstract

This study aims to determine the thermodynamic properties of the parastatistics system of order two. The thermodynamic properties to be searched include the Grand Canonical Partition Function (GCPF) Z , and the average number of particles N . These parastatistics systems is in a more general form compared to quantum statistical distribution that has been known previously, i.e.: the Fermi-Dirac (FD) and Bose-Einstein (BE). Starting from the recursion relation of grand canonical partition function for parastatistics system of order two that has been known, recursion linkages for some simple thermodynamic functions for parastatistics system of order two are derived. The recursion linkages are then used to calculate the thermodynamic functions of the model system of identical particles with limited energy levels which is similar to the harmonic oscillator. From these results we concluded that from the Grand Canonical Partition Function (GCPF), Z , the thermodynamics properties of parastatistics system of order two (paraboson and parafermion) can be derived and have similar shape with parastatistics system of order one (Boson and Fermion). The similarity of the graph shows similar thermodynamic properties.

Keywords: parastatistics, thermodynamic properties

Pendahuluan

Di tinjau dari kaidah-kaidah mekanika kuantum, tidak ada keharusan bahwa statistik partikel-partikel yang ada harus memenuhi kaidah statistika Bose-Einstein maupun Fermi-Dirac. Tetapi kedua jenis statistik tersebut sudah dibuktikan kebenarannya melalui berbagai eksperimen. Partikel-partikel yang memenuhi statistik Bose-Einstein disebut partikel-partikel

boson yang memiliki fungsi gelombang yang simetri terhadap pertukaran sebarang dua partikelnya. Contohnya antara lain foton, partikel alfa dan atom Helium. Sedangkan partikel-partikel fermion adalah partikel-partikel yang memenuhi statistik Fermi-Dirac dan prinsip larangan Pauli, yaitu partikel-partikel yang fungsi gelombangnya antisimetri terhadap

pertukaran sebarang dua partikel. Contohnya antara lain proton, neutron dan elektron.

Banyak fisikawan berusaha membuat formulasi statistik yang lebih umum dari jenis statistik yang telah ada, baik dengan membuat jenis statistik partikel yang baru, maupun dengan menggeneralisasi statistik Bose dan Fermi. Beberapa jenis statistik partikel selain Bose dan Fermi yang telah diperkenalkan antara lain *null statistics*, “*doubly-infinite*” *statistics*, *orthofermi statistics*, *hubbard statistics* dan lain-lain [1]. Jenis statistik yang merupakan hasil generalisasi dari statistik yang telah ada antara lain *intermediate statistics*, *parastatistics*, *infinite statistics*, *paronic statistics*, *anyon statistics* dan lain-lain [2].

Khusus untuk parastatistik, yang pertama kali diperkenalkan oleh Green [2], merupakan generalisasi pertama yang konsisten dari bentuk kuantum statistik Bose-Einstein (yang disebut paraboson), dan statistik Fermi-Dirac (yang disebut parafermi). Parastatistik memenuhi relasi komutasi trilinear untuk operator kreasi dan anihilasi partikel, serta memenuhi kaidah dekomposisi gugus (*cluster decomposition*) [3]. Karena hal ini, walaupun tidak ada indikasi bahwa partikel-partikel fundamental yang ada di alam saat ini memenuhi aturan parastatistik, tetapi teori ini tetap menarik untuk diselidiki lebih lanjut. Banyak fisikawan yang telah mencoba untuk mendapatkan besaran-besaran fisis yang terkait untuk sistem parastatistik, khususnya fungsi partisi kanonik lengkapnya (*grand canonical partition function*, GCPF). Dengan mengetahui GCPF akan dapat diketahui sifat-sifat termodinamika sistem parastatistik, sehingga dapat dijadikan dasar untuk mengklarifikasi apakah suatu sistem fisis memenuhi statistik ini atau tidak.

Parastatistik, yang diperkenalkan oleh Green [2], merupakan generalisasi pertama yang konsisten dari bentuk kuantum statistik Bose dan Fermi. Dalam formulasinya, relasi komutasi komutasi (Bose) dan antikomutasi (Fermi) bilinear standar untuk operator kreasi dan anihilasi partikel yaitu:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_q \equiv \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger - q \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i = \delta_{ij} \tag{2.1}$$

dengan $q = +1$ untuk statistik Bose dan $q = -1$ untuk statistik Fermi, digantikan dengan relasi trilinear sebagai berikut:

$$[\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j \pm \hat{a}_j \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = \frac{2}{p} \delta_{jk} \hat{a}_i^\dagger$$

(2.2)

dengan p bilangan bulat positif yang merupakan orde parastatistik.

Hartle [3] telah menunjukkan bahwa parastatistik merupakan salah satu dari teori-teori kuantum statistik yang memenuhi kaidah dekomposisi gugus (*cluster decomposition*). Kaidah ini menyatakan bahwa pengukuran besaran-besaran fisis dari partikel-partikel “yang terisolasi” tidak bergantung pada ada atau tidak adanya partikel-partikel lain di tempat lain yang cukup jauh. Meskipun memenuhi kaidah dekomposisi gugus, tidak ada indikasi bahwa partikel-partikel fundamental yang ada di alam saat ini memenuhi aturan parastatistik. Tetapi teori ini tetap menarik untuk diselidiki lebih lanjut. Secara khusus, banyak fisikawan yang telah mencoba untuk mendapatkan besaran-besaran fisis yang terkait untuk sistem parastatistik, khususnya fungsi partisi kanonik lengkapnya (*Grand Canonical Partition Function*, GCPF) [4-8].

Tinjau suatu sistem partikel-partikel yang tidak saling berinteraksi, dengan Hamiltoniannya diberikan oleh

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \hat{N}_{\alpha} \tag{2.3}$$

dengan E_{α} merupakan energi keadaan kuantum partikel tunggal $|i_{\alpha}\rangle$ dan \hat{N}_{α} merupakan operator yang mencacah banyaknya partikel yang berada pada $|i_{\alpha}\rangle$, sedangkan m menunjukkan jumlah aras energi yang berbeda (bisa merosot), dinotasikan sebagai $i_{\alpha} = 1, \dots, m$, dengan m dapat tak berhingga.

Secara umum, GCPF dapat ditulis sebagai [lihat misalnya: Huang [9], Sears dan Sallinger [10] Greiner [11]

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \text{Tr} e^{\beta(\mu \hat{N} - \hat{H})} \tag{2.4}$$

dengan $x_i = e^{\beta(\mu - E_i)}$, $\beta = 1/kT$, T adalah temperatur mutlak, k adalah konstanta Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K) dan μ adalah potensial kimia. Sedangkan tracanya meliputi semua keadaan yang ada pada sistem yang ditinjau. GCPF untuk sistem partikel

identik yang invarian terhadap permutasi partikel telah diformulasikan secara terpisah oleh Polychronakos [6], Meljanac [12] dan Chaturvedi [4], dalam bentuk jumlahan polinomial-polinomial Schur

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$$

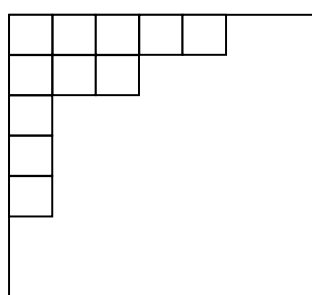
(2.5)

dengan Λ bergantung pada jenis statistik partikel yang ditinjau. Sedangkan polinomial Schur, $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ merupakan polinomial simetris yang didefinisikan sebagai berikut, lihat misalnya Fulton [13],

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \frac{|x_j^{m+\lambda_i-1}|}{\Delta(x_1, \dots, x_m)}; & \text{untuk } \lambda_{m+1} = 0 \\ 0 & ; \text{ untuk lainnya} \end{cases}$$

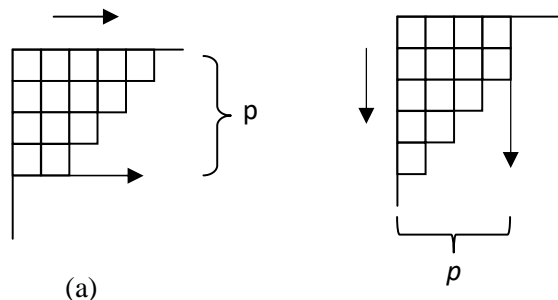
(2.6)

Dengan $\Delta(x_1, \dots, x_m) \equiv \prod (x_i - x_j)$ adalah polinomial Vandermonde. Bentuk polinomial Schur bergantung pada parameter λ , yang adalah partisi dari suatu bilangan bulat n , yaitu $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_n)$ dengan $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, dan $\sum_i \lambda_i = n$. Untuk setiap λ terkait suatu tabel Young yang berupa kotak-kotak rata kiri dengan λ_i kotak pada baris ke- i . Sebagai contoh untuk $n = 11$, dan $\lambda = (5, 3, 1, 1, 1)$, tabel Young-nya adalah



Gambar 1. Tabel Young untuk $\lambda = (5, 3, 1, 1, 1)$

Untuk paraboson orde p , Λ pada pers. (2.5) terdiri dari himpunan semua λ yang tabel Young-nya maksimum memiliki p baris. Sedangkan untuk parafermi orde p , Λ terdiri dari himpunan semua λ yang tabel Young-nya maksimum memiliki p kolom.



Gambar 2 Tabel Young untuk $p = 4$.
(a) Paraboson (b) Parafermi

GCPF untuk parafermi orde p , GCPF di pers. (2.5), telah dapat disederhanakan menjadi rasio dua determinan [4,14]

$$Z_{(p)}^{pF}(x_1, \dots, x_m) = \frac{|x_j^{m-i} - x_j^{m+p+i-1}|}{|x_j^{m-i} - x_j^{m+i-1}|}$$

(2.7)

Sedangkan untuk paraboson orde p , GCPF-nya juga dapat dinyatakan sebagai rasio dua determinan [7]

$$Z_{(p)}^{pB}(x_1, \dots, x_m) = \frac{|P_{(p)}(x_1, \dots, x_m)|}{|P_{(p)}(x_1, \dots, x_m)|}$$

(2.8)

dengan $|P_{(p)}(x_1, \dots, x_m)|$ adalah determinan suatu matriks yang elemen-elemennya diberikan oleh

$$(P_{(p)})_{ij} = \begin{cases} x_j^{m-i} & ; \text{ untuk } 1 \leq i \leq p \\ x_j^{m-i} + (-1)^{(p+1)} x_j^{m-p+i-1}; & \text{ untuk } (p+1) \leq i \leq m \end{cases}$$

(2.9)

Bentuk $Z_{(p)}^{pB}(x_1, \dots, x_m)$ di pers. (2.8) diperoleh dengan menyelesaikan relasi rekursi yang diturunkan menggunakan rumus simetrisasi polinomial Schur [Satriawan, 2002]

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m s_\lambda(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{x_j}{(x_j - x_i)}$$

(2.10)

Maka diperoleh kaitan rekursif bentuk parastatistik,

$$Z_{(p,q)}^{ind}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m Z_{(p,q)}^{ind}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_m) \prod_{j=i}^m \frac{x_j}{(x_j - x_i)} + x_1 \dots x_m Z_{(p,q-1)}^{ind}(x_1, \dots, x_m) \quad (2.11)$$

(dengan \hat{x}_i berarti x_i dihilangkan) untuk sebarang partisi λ dengan $\lambda_m = 0$. Persamaan ini diperoleh dari ekspansi minor determinan dalam pers. (2.6).

Kasus khusus adalah ketika $p = m$, yang sebelumnya telah dapat disederhanakan [5]

$$Z_{(p)}^{pB}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{\prod_{i=1}^p (1 - x_i)} \frac{1}{\prod_{i < j}^p (1 - x_i x_j)} \quad (2.12)$$

Kaitan ini dapat digunakan untuk masukan awal pada rekursi di pers. (2.11).

Dipilihnya model aras energi yang mirip osilator harmonik adalah karena sistem ini memiliki aras energi yang berjarak sama, sehingga memudahkan perhitungan dan selain itu banyak sistem-sistem fisis yang juga memiliki aras-aras energi berjarak sama yang mirip osilator harmonik, $E_i = (i + \frac{1}{2}) \hbar \omega$, $i = 0, 1, 2, \dots$ seperti vibrasi molekul, atom dalam kisi-kisi kristal dan sistem paramagnetik. Penggeneralisasian ke bentuk aras-aras energi yang berbeda dapat dengan mudah dilakukan dengan menggunakan masukan nilai-nilai E_i , asalkan sistemnya berupa sistem partikel yang tidak saling berinteraksi.

Besaran-besaran termodinamika dapat diperoleh dari fungsi partisi kanonik lengkap, Z , yaitu diperoleh melalui potensial kanonik lengkapnya,

$$\Omega(T, V, \mu) = -kT \ln Z(T, V, \mu) \quad (2.13)$$

Metode Penelitian

Secara garis besar, aktivitas penelitian ini dilakukan dengan dua tahapan yaitu (i) formulasi metode komputasi dan (ii) penuangan numerik dalam bahasa pemrograman komputasi. Pada tahapan formulasi metode komputasi, aktifitas penelitian diawali dengan

penentuan syarat batas. Kemudian dilakukan analisis sifat-sifat termodinamika dari fungsi parastatistik. Langkah berikutnya penuangan metode komputasi numerik dalam program komputer. Sebelum dilakukan perhitungan secara komputerisasi, metode komputasi numerik diujicobakan kestabilan program terhadap syarat batas-syarat batas yang dimasukan. Hal ini penting dilakukan agar hasil nilai perhitungan secara komputer bukan merupakan sekumpulan data tanpa makna fisis. Selain itu, prosedur ini juga menjadi klarifikasi syarat batas berlakunya parameter fisis yang telah dituangkan dalam numerik.

Rerata jumlah partikel dapat diturunkan sebagai berikut:

$$N(T, V, \mu) = - \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right|_{T, V} = \left. \frac{T}{Z} \frac{\partial Z(x_1, \dots, x_m)}{\partial \mu} \right|_T \quad (2.14)$$

bentuk $\partial Z / \partial \mu$ diperoleh dengan mendiferensialkan kaitan rekursi pada pers. (2.11) terhadap μ pada T konstan dan nilai $\partial Z / \partial \mu$ sebagai masukan awal pada rekursi pers. (2.14) diperoleh dari pers. (2.11)

$$\left. \frac{\partial Z(x_1, x_2)}{\partial \mu} \right|_T = \beta Z(x_1, x_2) \left[\frac{x_1}{(1 - x_1)} + \frac{x_2}{(1 - x_2)} + \frac{2x_1 x_2}{(1 - x_1 x_2)} \right] \quad (2.15)$$

dengan $\beta = 1/kT$ dan $Z(x_1, x_2)$ diberikan seperti di pers. (3.1).

Hasil dan Pembahasan

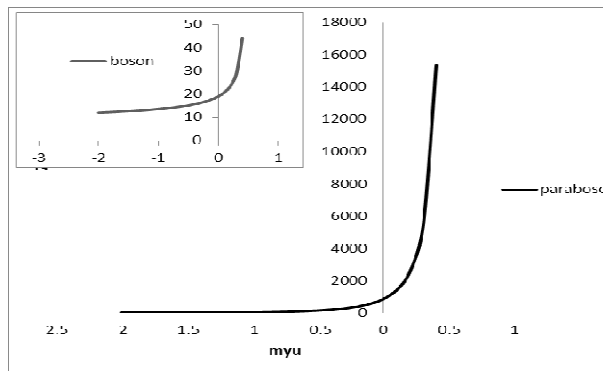
Dari hasil perhitungan komputasi, diperoleh beberapa grafik yang dapat menggambarkan sifat-sifat dari fungsi-fungsi termodinamika model sistem parastatistik orde dua.

Pertama-tama diselidiki daerah dimana nilai μ diperbolehkan. Hal ini dilakukan dengan melihat perilaku N yang secara umum harus bernilai positif. Karena itu dihitung nilai N sebagai fungsi dari μ , yang grafik hasilnya adalah sebagai berikut :

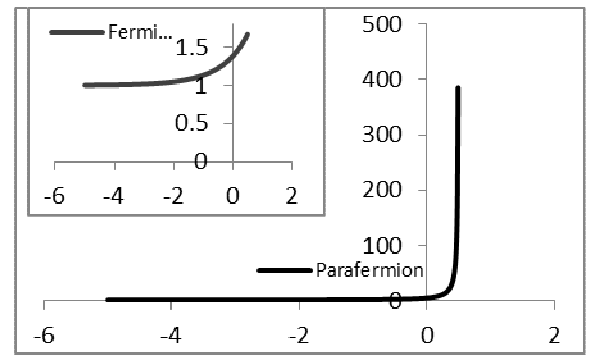
Pada grafik (3.1) terlihat bahwa fungsi partisi kanonik lengkap Z untuk sistem paraboson maupun sistem parafermion memiliki pola yang sama dan terlihat nilai μ -nya juga harus lebih kecil daripada energi terendah aras partikel tunggal, $\epsilon = \frac{1}{2}$, yaitu $\mu < \frac{1}{2}$. Selain itu juga dapat diselidiki nilai Z -nya yang secara umum juga tidak boleh negatif.

Grafik (4a) di atas menunjukkan bahwa nilai μ lebih rendah dari ϵ terendah. Ini berarti bahwa sistem paraboson orde dua cenderung bersifat menyerap partikel seperti sistem boson biasa, yaitu cenderung menambah jumlah partikel ke dalam sistem tanpa kehilangan energi

[lihat misalnya Greiner [11]. Dari sifat ini saja dapat diduga paraboson orde dua dapat mengalami kondensasi bak boson. Sedangkan untuk sistem parafermion pada grafik (4b) perilaku $Z(\mu)$ mirip dengan sistem paraboson. Hal ini diduga bahwa untuk parafermi orde p , jika $p = 1$ maka menjadi partikel fermi, jika $p \gg 1$ berperilaku mirip paraboson dan jika $p \rightarrow \infty$ akan menjadi partikel boson. Parafermion merupakan partikel non-elementer yang memiliki perilaku antara partikel fermion dan partikel boson [15-18].

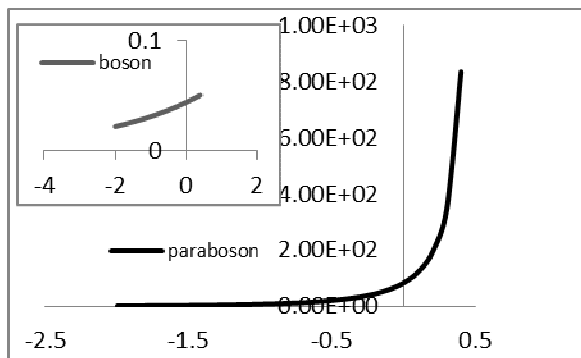


$Z^{Pb}(\mu)$

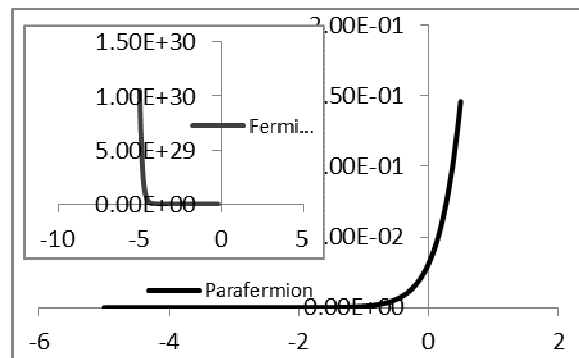


$Z^{Pf}(\mu)$

Grafik 3 Fungsi Partisi Kanonik Lengkap, $Z(\mu)$. Sistem Paraboson, (b) Sistem Parafermi

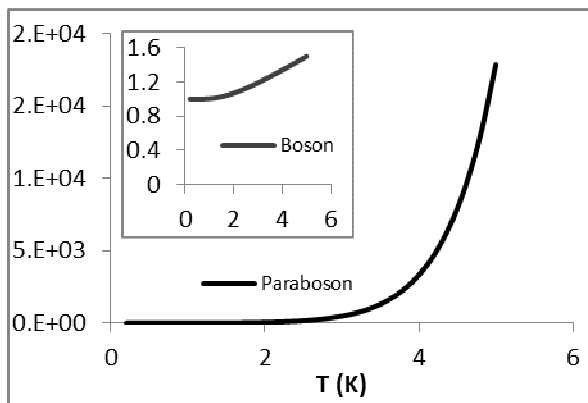


(a) $N^{Pb}(\mu)$

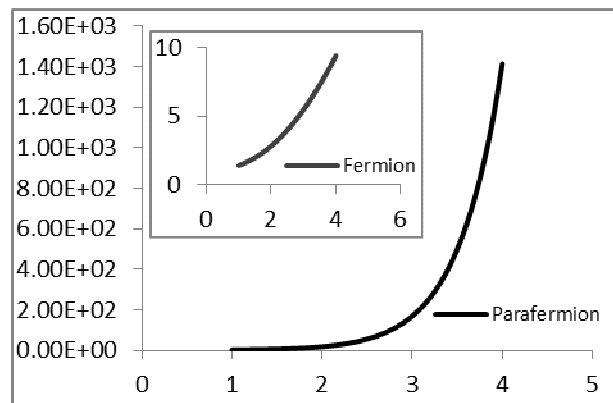


(a) $N^{Pf}(\mu)$

Grafik 4 Rerata JumlahPartikel, $N(\mu)$. Sistem Paraboson, (b) Sistem Parafermi

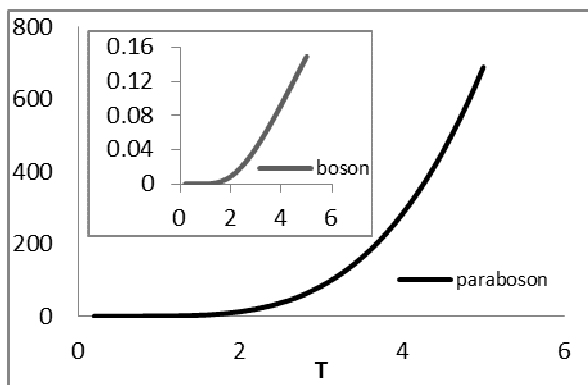


(a) $Z^{Pb}(T)$

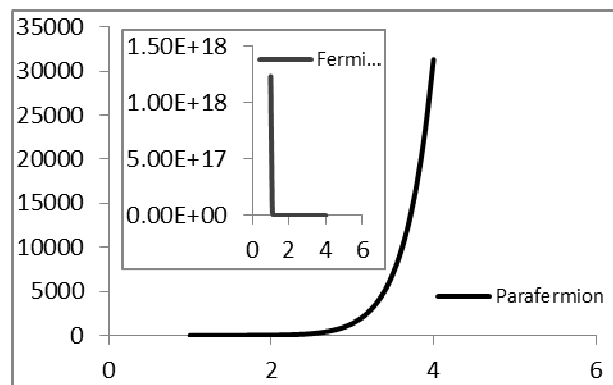


(b) $Z^{Pf}(T)$

Grafik 5 Fungsi Partisi Kanonik Lengkap, $Z(T)$. Sistem Paraboson, (b) Sistem Parafermi



$N^{Pb}(T)$



(a) $N^{Pf}(T)$

Grafik 6 Rerata Jumlah Partikel, $N(T)$. Sistem Paraboson, (b) Sistem Parafermi

Dari grafik 5 terlihat $Z(T)$ untuk sistem parabolon-parafermion maupun sistem boson-fermion memiliki pola yang sama. Ini berarti pada kedua sistem ini fungsi partisi kanonik lengkapnya akan naik seiring dengan kenaikan temperatur. Pada grafik (6), tampak bahwa dengan semakin besar suhu T , semakin cepat nilai N akan mengalami kenaikan secara drastis seiring dengan kenaikan temperatur. Ini berarti dengan meningkatnya temperatur T berakibat rerata total jumlah partikel akan bertambah. Kaitan antara N dan T dapat dilihat pada pers. (3.4), $N \propto T$.

Orde dari parafermion, p , merupakan kuantitas yang sebanding dengan jumlah (rerata) partikel yang menempati keadaan kuantum tertentu (Andriana 2013). Parafermion orde satu atau

fermion (lihat grafik 6b) memiliki pola yang berbeda dengan parafermion orde dua. Parafermion orde satu memiliki keadaan kuantum lebih sedikit dari pada parafermion orde dua, sehingga bila terjadi kenaikan temperatur berakibat rerata jumlah partikel yang mengisi keadaan kuantum tersebut semakin berkurang. Sedangkan untuk parafermion orde dua memiliki keadaan kuantum yang lebih banyak sehingga bila terjadi kenaikan temperatur rerata jumlah partikel akan bertambah (mirip parabolon).

Simpulan

Fungsi partisi kanonik lengkap, Z , untuk sistem parabolon-parafermion memiliki pola yang

identik dengan sistem boson-fermion. Ini berarti bahwa sistem paraboson orde dua cenderung bersifat menyerap partikel seperti sistem boson biasa, yaitu cenderung menambah jumlah partikel ke dalam sistem tanpa kehilangan energi. Dari sifat ini saja dapat diduga paraboson orde dua dapat mengalami kondensasi bak boson.

Orde dari parafermion, p , merupakan kuantitas yang sebanding dengan jumlah (rerata) partikel yang menempati keadaan kuantum tertentu. Parafermion orde satu memiliki keadaan kuantum lebih sedikit dari pada parafermion orde dua, sehingga bila terjadi kenaikan temperatur berakibat rerata jumlah partikel, N yang mengisi keadaan kuantum tersebut semakin berkurang. Sedangkan untuk parafermion orde dua memiliki keadaan kuantum yang lebih banyak sehingga bila terjadi kenaikan temperatur rerata jumlah partikel akan bertambah (mirip paraboson).

Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini didanai oleh dana DIPA FMIPA UNY dengan perjanjian kontrak NOMOR SURAT PERJANJIAN NO: 2089/UN34.13/PL/2014 TANGGAL 2 JUNI 2014

Pustaka

- [1] Greenberg, O. W. (1993) *Quons, an Interpolation Between Bose and Fermi Oscillators*, arXiv:cond-mat/9301002v1
- [2] Green, H. S. (1953) *A Generalized Method of Quantization*, *Phys. Rev.* 90, 270
- [3] Hartle, J. B., R. H. Stolt and J. R. Taylor (1970) *Paraparticles of Infinite Order*, *Phys. Rev. D-2*, 1759-1761
- [4] Darmono. (1994). *Logam Dalam Sistem Biologi Makhluk Hidup*. Jakarta: UI Press, Hal 65.
- [5] Chaturvedi, S and V. Srinivasan (1997) *Grand Canonical Partition Functions for Multi Level Parafermi Systems of Any Order*, *Phys. Lett. A-224*, 249-252
- [6] Polychronakos, A. P. (1996) *Path Integrals and Parastatistics*, *Nucl. Phys. B-474*, 529-539
- [7] Satriawan, M. (2002) *Generalized Parastatistics Systems; Dissertation*, University of Illinois at Chicago
- [8] Suranyi, P. (1990) *Thermodynamics of Parabosonics and Parafermionic Systems of Order Two*, *Phys. Rev. Lett.* 65, 2329
- [9] Huang, K. (1965) *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
- [10] Sears, F. W. and G. L. Sallinger, (1975) *Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Thermodynamics*, Addison-Wesley, Massachusetts
- [11] Greiner, W., L. Neise, and H. Stöcker (1997) *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Heidelberg: Springer-Verlag
- [12] Meljanac, S., M. Stojic and D. Svrtnan (1996) *Partition Functions for General Multi-level Systems*, RBI-TH-06
- [13] Fulton, W., (1991) *Young Tableaux*, Cambridge Univ. Press, New York
- [14] Chaturvedi, S., R. H. McKenzie, P. K. Panigrahi and V. Srinivasan. (1997) *Equivalence of The Grand Canonical Partition Functions of Particles with Different Statistics*, *Mod. Phys. Lett. A-12*, 1095-1099
- [15] Andriana, M. (2013) *Parafermions in Interaction Many Body Systems*, http://www.uoi.gr/HINP/Workshop_2014/Session-2_A.Martinou.pdf
- [16] Satriawan, M. (2004) *Grand Canonical Partition Function for Parastatistical Systems*, *Physics Journal IPS Proceeding Supplement C8 0515*
- [17] Hama, M., M. Sawamura and H. Suzuki, (1992) *Thermodynamical Properties of High Orders Parabosons*, *Prog. Theor. Phys.* 88, 149-153
- [18] Mishra, A. K. and G. Rajasekaran, (1995) *Generalized Fock Spaces, New Forms of Quantum Statistics and Their Algebras*, *Pramana* 45, 91-93