Trayektori ortogonal dan pemetaan konformal pada fungsi kompleks

(On the othogonal trajectories and conformal mapping of complex variable functions)

Kus Prihantoso Krisnawan dan Atmini Dhoruri

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta (UNY), Kampus Karangmalang, Sleman, DI Yogyakarta, 55281
tel. 08122753549, faks. (0274) 548203 dan e-mail: kuspk@uny.ac.id, atmini_uny@ac.id.

diterima 25 Juli 2014, disetujui 30 September 2014

Abstrak

Penelitian ini dimaksudkan untuk menyelidiki kaitan trayektori orthogonal, fungsi analitik, dan pemetaan konformal dari suatu fungsi kompleks. Trayektori ortogonal adalah perpotongan dua keluarga kurva yang saling tegak lurus. Melalui syarat *Cauchy-Riemann*, suatu fungsi kompleks $f(z) = u + iv$ dilihat keanalitikannya, dan diinterprestaikan bentuk geometri dari u dan v. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dua fungsi yang saling konjugat harmonik saling bertrayektori ortogonal. Jika dua keluarga kurva yang saling bertrayektori orthogonal dipetakan menggunakan pemetaan konformal maka menghasilkan fungsi yang saling bertrayektori ortogonal.

Kata kunci: trayektori ortogonal, fungsi analitik, pemetaan konformal

Abstract

This research goal is to investigate the connection of orthogonal trajectories, analitic functions, and conformal mapping. Orthogonal trajectories are the intersection of two families of mutually perpendicular curves. The analytical property of a complex function $f(z) = u + iv$ is investigated using *Cauchy-Riemann* conditions and then the geometric shapes of u and v *are* interpreted. The results showed that if two functions are mutually harmonic conjugate, then they are mutually orthogonal trajectories. If two families of curves of mutually orthogonal trajectories are mapped by conformal mapping then the result functions are also mutually orthogonal trajectories.

Key words: orthogonal trajectories, analytic functions, conformal mapping

Pendahuluan

Trayektori ortogonal diartikan sebagai perpotongan dua keluarga (rumpun) kurva yang saling tegak lurus. Hal ini berarti, setiap kurva pada salah satu keluarga berpotongan tegak lurus dengan semua kurva pada keluarga kurva yang lain.

Sedangkan, dua buah kurva dikatakan berpotongan tegak lurus (ortogonal) jika pada titik perpotongannya, kedua kurva mempunyai garis singgung yang saling tegak lurus (lihat [1]). Sebagai contoh dari trayektori ortogonal yaitu keluarga kurva $y = mx$ dengan keluarga kurva $x^2 + y^2 = c^2$. Keluarga pertama merupakan keluarga garis yang melalui titik $(0,0)$ sedangkan keluarga kedua merupakan keluarga lingkaran yang berpusat di $(0,0)$. Garis-garis $y = mx$, untuk setiap m, berpotongan tegak lurus dengan lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 = c^2$, untuk setiap c.

Trayektori ortogonal merupakan masalah klasik dalam matematika. Namun kenyataanya, sampai sekarang masalah ini banyak digunakan dalam bidang teknik maupun fisika. Misalnya pada medan elektrostatis, garis-garis gaya (*force*) saling tegak lurus dengan garis-garis potensial konstan. Pada tahun 1972, C.R. Chester (lihat [2]), mengembangkan metoda untuk menyelesaikan persamaan Van der Pol menggunakan representasi trayektori ortogonal. Selain itu, Collard dan Hall, pada [3] menyatakan dalam makalahnya bahwa fungsi dengan beberapa variabel, seperti kepadatan elektron dan energi potensial nuklir *Born–Oppenheimer*, dapat dianalisis dengan lebih efektif menggunakan trayektori orthogonal. Secara khusus, persekitaran titik kritis dari fungsi dengan beberapa variabel dapat dianalisa dengan lebih detail menggunakan trayektori orthogonal.

Stewart dalam [1] menyatakan bahwa di dalam bidang termodinamika, isoterm (kurva-kurva untuk temperatur yang sama) saling tegak lurus dengan *flowline* dari panas. Stewart juga mengatakan bahwa pada bidang aerodinamik, *streamlines* (kurva-kurva arah *airflow*) bertrayektori ortogonal dengan kurva kecepatan ekuipotensial. Selanjutnya Lui, pada [4], menyelidiki tentang pemetaan konformal pada *Human Brain Mapping*. Beliau mengatakan bahwa trayektori orthogonal diperlukan pada beberapa kasus untuk memastikan bahwa derivatif *covarian* yang diaproksimasi merupakan garis singgung permukaan *Human Brain Mapping*.

Pada makalah ini dibahas mengenai penggunaan trayektori orthogonal pada fungsi variabel kompleks. Dipilihnya fungsi variabel kompleks karena penggambaran grafik pada fungsi kompleks merupakan masalah yang rumit. Hal ini dikarenakan, setiap bilangan z dan w terletak di bidang bukan di garis, maka tidak ada representasi grafik yang cocok untuk fungsi $w = f(z)$ sedemikian sehingga setiap $w = f(z)$ dapat digambarkan pada satu bidang. Namun, dengan mengindikasikan pasangan yang sesuai antara nilai $z = (x, y)$ dengan $w = (u, v)$, fungsi $f(z)$ dapat digambarkan pada bidang yang terpisah. Tetapi hal ini tetap saja tidak bisa dilakukan untuk sebarang fungsi kompleks. Dilain pihak, keanalitikan suatu fungsi kompleks dapat dilihat melalui trayektori ortogonal. Oleh karena itu secara spesifik, makalah ini mengungkap kaitan trayektori ortogonal, keanalitikan fungsi, dan pemetaan konformal dari suatu fungsi kompleks.

Dasar Teori

Sebelum masuk pada pembahasan, berikut ini diberikan dua buah teorema yang dapat membantu untuk menentukan keterdiferensialan suatu fungsi kompleks sehingga dapat membantu dalam menentukan keanalitikan fungsi kompleks.

Teorema 1. (lihat [1]).
Misalkan
$f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

didefinisikan pada suatu himpunan buka *S* yang memuat titik $z_0 = x_0 + iy_0$. Jika turunan parsial pertama dari u dan v di dalam *S* ada dan kontinu di z_0 serta memenuhi persamaan *Cauchy-Riemann* ($u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$) di titik z_0 maka f terdiferensial di z_0. Lebih lanjut,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

Bukti lengkap teorema ini ada pada Brown dan Churchill [5].

Konsekuensi dari Teorema 1. adalah jika turunan parsial pertama dari u dan v kontinu dan memenuhi persamaan *Cauchy-Riemann* pada semua titik di dalam *S* maka *f* analitik di *S*.

Di lain pihak, fungsi harmonik dapat menghubungkan antara fungsi bernilai real dengan fungsi kompleks (untuk definisi fungsi harmonik secara lengkap dapat dilihat di [6]). Keharmonikan dua buah fungsi tertentu (misal u dan v) terkait erat dengan keanalitikan suatu fungsi kompleks $f = u + iv$. Sebuah fungsi $f(z)$ dikatakan analitik jika f terdiferensial di setiap titik z dalam domainnya. Teorema berikut memberikan hubungan di antara keduanya.

Teorema 2. (lihat [5]).
Jika suatu fungsi

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

adalah sebuah fungsi yang analitik dalam domainnya maka u dan v memenuhi persamaan *Laplace*, yaitu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \ \ dan \ \ v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Bukti.
Jika diberikan sebuah fungsi analitik

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

maka u dan v memenuhi persamaan *Cauchy-Riemann* yaitu

$$u_x = v_y \ \ dan \ \ v_x = -u_y.$$

Turunkan keduanya terhadap x maka didapatkan

$$u_{xx} = v_{yx} \ \ dan \ \ v_{xx} = -u_{yx}.$$

Turunkan keduanya terhadap y maka didapatkan

$$u_{xy} = v_{yy} \ \ dan \ \ v_{xy} = -u_{yy}.$$

Turunan parsial dari u dan v kontinu maka $u_{yx} = u_{yx}$ dan $v_{yx} = v_{yx}$, dengan demikian

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

dan

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xy} - u_{yx} = 0.$$

Jadi, u dan v harmonik dalam domainnya. ♦

Pasangan dari fungsi u yang juga harmonik disebut sebagai *fungsi konjugat harmonik* dari u.

Hasil dan Diskusi

Pada bagian ini akan berikan beberapa fakta dan buktinya mengenai hubungan keharmonikan suatu fungsi dan pemetaan konformal dengan trayektori orthogonal.

Hubungan fungsi harmonik dengan trayektori orthogonal

Sebuah fungsi harmonik u pasti mempunyai pasangan, yaitu fungsi lain yang merupakan konjugat harmonik dari u. Jaminan akan adanya pasangan dari fugsi u disajikan berikut ini.

Fakta 1. Jika u adalah sebuah fungsi yang harmonik dalam domain *D*, maka terdapat fungsi v yang harmonik dalam domain *D* dan merupakan konjugat harmonik dari *u*.

Bukti.
Misalkan fungsi $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$ mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dalam domain *D* dan misalkan (x_0, y_0) dan (x, y) adalah sebarang dua titik dalam *D*. Jika $P_y = Q_x$ di manapun di dalam *D* maka integral garis

$$\int_C P(s,t) + Q(s,t)dt$$

dari (x_0, y_0) ke (x, y) tidak dipengaruhi oleh bentuk kurva *C*, asalkan kurva *C* terletak seluruhnya di dalam *D*. Sehingga

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(s,t) + Q(s,t)dt,$$

dengan

$$F_x(x,y) = P(x,y) \;\; dan \;\; F_y(x,y) = Q(x,y). \qquad (\mathbf{1})$$

Di lain pihak, karena u memenuhi persamaan laplace, maka

$$(u_x)_x = \left(-u_y\right)_y$$

dalam domain *D*, dan diketahui bahwa turunan parsial kedua dari u kontinu maka turunan parsial pertamanya (u_x dan $-u_y$) juga kontinu sehingga

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_t(s,t) + u_s(s,t)dt$$

Terdefinisi dengan baik untuk setiap (x, y) dalam *D*, dan berdasarkan persamaan (1) maka didapatkan

$$v_y = u_x \;\; dan \;\; v_x = -u_y$$

yang merupakan persamaan *Cauchy-Riemann*.

Turunan parsial pertama dari u adalah fungsi kontinu karena u memenuhi persamaan *Laplace*. Selanjutnya, karena u dan v memenuhi persamaan *Cauchy-Riemann* dan turunan parsial pertama dari u merupakan fungsi kontinu maka turunan parsial pertama dari v juga kontinu. Sehingga berdasarkan Teorema 1. maka $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ adalah sebuah fungsi yang analitik dalam domain *D* sehingga berdasarkan Teorema 1., didapatkan bahwa v adalah fungsi konjugat harmonik dari u. ♦

Fakta 2. Misalkan fungsi $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ adalah fungsi yang analitik dalam domain *D*. Didefinisikan kurva $u(x,y)=c_1$ dan $v(x,y)=c_2$, dengan c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta real dan $z_0=x_0+iy_0\in D$ merupakan titik perpotongan kedua kurva. Jika $f'(z_0)\neq 0$ maka kurva $u(x,y)=c_1$ dan $v(x,y)=c_2$ saling tegak lurus di (x_0,y_0).

Bukti.
Perhatikan bahwa

$u(x,y)=c_1$

$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$

$$\Leftrightarrow u_x+u_y y'=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Diketahui bahwa $f'(z_0)\neq 0$ maka $u_y\neq 0$, jika $u_y=0$ maka berdasarkan persamaan (2) $u_x=0$, padahal berdasarkan Teorema 1. didapatkan $f'(z_0)=u_x+iu_y=0$ kontradiksi dengan $f'(z_0)\neq 0$.
Berdasarkan persamaan (2) maka didapatkan

$y'=-\frac{u_x}{u_y}$.

Sehingga gradien kurva $u(x,y)=c_1$ di titik (x_0,y_0) adalah

$m_u=-\frac{u_{x_0}}{u_{y_0}}$.

Di lain pihak

$v(x,y)=c_2$

$\Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$

$$\Leftrightarrow v_x+v_y y'=0 \qquad \textbf{(3)}$$

Diketahui bahwa $f'(z_0)\neq 0$ maka $v_y\neq 0$, jika $v_y=0$ maka berdasarkan persamaan (3) $v_x=0$, padahal berdasarkan Teorema 1. didapatkan $f'(z_0)=v_y-iv_x=0$ kontradiksi dengan $f'(z_0)\neq 0$.
Berdasarkan persamaan (3) maka didapatkan

$\Leftrightarrow y'=-\frac{v_x}{v_y}$.

Sehingga gradien kurva $v(x,y)=c_2$ di titik (x_0,y_0) adalah

$m_v = -\frac{v_{x_0}}{v_{y_0}}$.

Karena fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik dalam domain *D* maka $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ memenuhi persamaan *Cauchy-Riemann* sehingga

$$m_u m_v = \frac{u_{x_0}}{u_{y_0}} \frac{v_{x_0}}{v_{y_0}} = \frac{v_{y_0}}{-v_{x_0}} \frac{v_{x_0}}{v_{y_0}} = -1.$$

Jadi, kurva $u(x,y) = c_1$ dan $v(x,y) = c_2$ saling tegak lurus di (x_0, y_0).

♦

Fakta 3. Jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ adalah pasangan fungsi harmonik konjugat dalam domain *D* maka rumpun kurva $u(x,y) = c_1$ dan rumpun kurva $v(x,y) = c_2$ saling bertrayektori orthogonal.

Bukti.

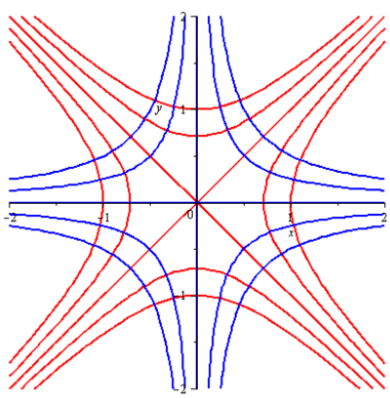
Berdasarkan Teorema 2. maka didapatkan fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ yang analitik. Selanjutnya berdasarkan Fakta 2. maka $u(x,y) = c_1$ dan $v(x,y) = c_2$ saling tegak lurus pada titik perpotongannya.

♦

Contoh. Fungsi $f(x) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ merupakan fungsi yang analitik, sehingga $x^2 - y^2 = c_1$ dengan $2xy = c_2$ saling bertrayektori orthogonal. Gambar dari trayektori tersebut dapat dilihat pada Gambar 1.

Y

X



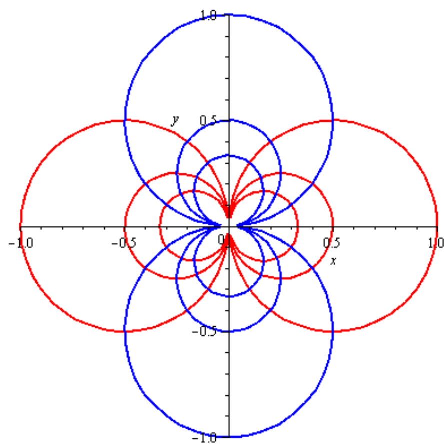
Gambar 1. Trayektori orthogonal dari fungsi $x^2 - y^2 = c_1$ dan $2xy = c_2$.

Fakta 4. Jika $u(x,y)$ adalah sebuah fungsi yang harmonik dalam domain *D*, maka terdapat rumpun kurva $v(x,y) = c_2$ yang bertrayektori ortogonal dengan rumpun kurva $u(x,y) = c_1$.

Bukti. Diberikan fungsi $u(x, y)$ yang harmonik dalam domain *D* maka berdasarkan Fakta 1. maka terdapat fungsi $v(x, y)$ yang merupakan harmonik konjugat dari $u(x, y)$. Selanjutnya berdasarkan Fakta 3, maka rumpun kurva $u(x, y) = c_1$ dan rumpun kurva $v(x, y) = c_2$ saling bertrayektori ortogonal. ♦

Contoh. Fungsi $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ merupakan fungsi harmonik maka terdapat fungsi harmonik $v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ yang merupakan fungsi harmonik konjugat dari *u*(*x*, *y*). Rumpun kurva $u(x, y) = c_1$ bertrayektori orthogonal dengan rumpun kurva $v(x, y) = c_2$. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 2.

X



Gambar 2. Trayektori Orthogonal dari fungsi $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ dan $v(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$.

Hubungan pemetaan konformal dengan trayektori orthogonal

Berdasarkan definisi dari pemetaan konformal maka jika kurva γ_1 dan γ_2 saling tegak lurus pada titik z_0 di dalam *D* berakibat kurva γ'_1 dan γ'_2 yang merupakan image dari kurva γ_1 dan γ_2 pada $f(z_0)$ juga saling tegak lurus.

Fakta 5. Misalkan $w = f(z)$ adalah pemetaan konformal di dalam domain *D*. Jika rumpun kurva $\gamma_1 = c_1$ dan $\gamma_2 = c_2$ merupakan rumpun kurva mulus dan saling bertrayektori ortogonal di dalam *D* maka rumpun kurva $\gamma'_1 = c'_1$ dan $\gamma'_2 = c'_2$ yang merupakan image dari rumpun kurva $\gamma_1 = c_1$ dan $\gamma_2 = c_2$ pada fungsi $f(z)$ juga saling bertrayektori orthogonal.

Bukti.

Berdasarkan definisi dari pemetaan konformal yang mempertahankan sudut maka masing-masing kurva $\gamma_1 = c_1$ dan $\gamma_2 = c_2$ yang tegak lurus juga akan berakibat masing-masing bayangannya juga saling tegak lurus.

Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Terdapat hubungan antara fungsi harmonik dengan trayektori ortogonal. Jika ada sebuah fungsi yang harmonik maka terdapat fungsi harmonik lain yang merupakan konjugat harmonik dari fungsi yang pertama. Kedua fungsi yang saling konjugat harmonik ini juga saling bertrayektori.

2. Jika dua keluarga kurva yang saling bertrayektori orthogonal dipetakan melalui suatu pemetaan konformal maka akan menghasilkan rumpun kurva yang juga saling bertrayektori ortogonal.

Ucapan Terima Kasih

Dana penelitian ini diperoleh dari dana DIPA FMIPA UNY dengan nomor kontrak 2131/UN34.13/PL/2012.

Pustaka

[1]. J. Stewart, Calculus: Concepts and Contexts, Brooks and Cole Publishing Company, California, 1998.

[2]. C. R. Chester, Applied Scientific Research, Volume 26, Number 1 (1972) pp. 23-26.

[3]. K. Collard dan G. G. Hall, International Journal of Quantum Chemistry, Volume 12, Issue 4 (1977) pp. 623–637.

[4]. L. M. Lui, Computational Conformal Geometry and its Applications to Human Brain Mapping, Disertasi Doktor University of California Los Angeles, 2008.

[5]. J. W. Brown dan R. V. Churchill, Complex Variable and Applications, Edisi Internasional, McGraw-Hill: Singapura, 1996.

[6]. J. Lang, Complex Analysis, Third edition, Springer-Verlag New York Inc., 1993.

[1.]