

# SOLUSI TERBESAR PERTIDAKSAMAAN $A \otimes X \leq B$ KURANG DARI $X$ DARI $B \otimes X$ MENGGUNAKAN RESIDUASI MATRIKS ATAS SEMIRING IDEMPOTEN

## THE BEST SOLUTION FOR INEQUALITIES OF $A \otimes X$ LOWER THAN $X$ FROM $B \otimes X$ USING HIGH MATRIX RESIDUATION OF IDEMPOTENT SEMIRING

Eka Susilowati<sup>\*1</sup> dan Ari Suparwanto<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, Universitas PGRI Adibuana, Surabaya

<sup>2</sup>Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

\*email: [eka.susilowati@mail.ugm.ac.id](mailto:eka.susilowati@mail.ugm.ac.id)

Diterima 4 Desember 2015 disetujui 4 Maret 2016

### Abstrak

Semiring idempoten lengkap mempunyai struktur yang sama dengan lattice lengkap. Karena struktur yang sama dengan lattice lengkap, maka pertidaksamaan atas semiring idempoten lengkap dapat diperoleh solusinya melalui teori residuasi. Salah satu pertidaksamaan yang dibahas adalah pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dimana matrik  $A, X, B$  dengan entri - entrinya elemen dari semiring idempoten lengkap  $S$ . Lebih lanjut, diperkenalkan dual produk, yaitu  $\square$  merupakan operasi biner yang dilengkapkan dalam semiring idempoten lengkap  $S$  dan bukan termasuk dalam definisi standar semiring idempoten lengkap. Solusi pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dapat diperoleh dengan menggunakan teori residuasi. Karena adanya jaminan bahwa untuk setiap pemetaan isotone pada lattice lengkap selalu mempunyai fixed point, maka hal tersebut juga terjamin dalam semiring idempoten lengkap. Dengan demikian, karakteristik ini yang digunakan untuk dapat memperoleh solusi terbesar  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$ .

Kata kunci: dual Kleene Star, dual produk, lattice lengkap, semiring idempoten lengkap, teori residuasi

### Abstract

*A complete idempotent semiring has a structure which is called a complete lattice. Because of the same structure as the complete lattice then inequality of the complete idempotent semiring can be solved a solution by using residuation theory. One of the inequality which is explained is  $A \otimes X \leq B$  where matrices  $A, X, B$  with entries in the complete idempotent semiring  $S$ . Furthermore, introduced dual product  $\square$ , i.e. binary operation endowed in a complete idempotent semirings  $S$  and not included in the standard definition of complete idempotent semirings. A solution of inequality  $A \otimes X \leq B$  can be solved by using residuation theory. Because of the guarantee that for each isotone mapping in complete lattice always has a fixed point, then is also exist in a complete idempotent semirings. This of the characteristics is used in order to obtain the greatest solution of inequality  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$ .*

*Keywords: complete lattice, complete idempotent semiring, dual Kleene Star, dual product, residuation theory*

### Pendahuluan

Semiring idempoten  $S$  merupakan semiring yang operasi penjumlahan  $\oplus$  yang bersifat idempoten. Operasi penjumlahan  $\oplus$  dan pergandaan  $\otimes$  memiliki elemen netral yang dinotasikan  $\varepsilon$  dan  $e$ . Semiring idempoten

dikatakan lengkap jika jumlahan tak hingga elemennya tertutup dan operasi pergandaan  $\otimes$  bersifat distributif terhadap jumlahan  $\oplus$  tak hingga [1].

Dengan adanya sifat idempoten terhadap penjumlahannya, semiring idempoten dapat dilengkapi dengan relasi urutan yang dinotasikan  $\leq$ . Semiring idempoten lengkap mempunyai struktur yang sama dengan lattice lengkap. Karena struktur yang sama dengan lattice lengkap, maka pertidaksamaan atas semiring idempoten lengkap dapat diperoleh solusinya melalui teori residuasi.

Selain dalam skalar, konsep residuasi juga dapat diterapkan untuk persamaan semiring idempoten matrik. Salah satu persamaan yang dibahas adalah pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dengan  $A, X, B$  matrik dengan entri - entrinya elemen dari semiring idempoten lengkap  $S$ . Solusi terbesar pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dapat diperoleh dengan menggunakan teori residuasi. Awalnya, Baccelli (1992) meneliti bagaimana solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dengan  $A \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times 1}$ . Kemudian, penelitian dilanjutkan mengenai solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dengan  $A \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times n}$ . Selanjutnya, diteliti bagaimana solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$ , apabila ukuran semiring idempotent matriks diubah menjadi  $A \in S^{n \times p}$  dan  $X \in S^{p \times m}$

Seperti yang telah diketahui, semiring idempoten lengkap memiliki sifat operasi pergandaan  $\otimes$  distributif terhadap penjumlahan  $\oplus$ . Secara umum, dalam se-miring idempoten lengkap, sifat operasi  $\otimes$  distributif terhadap  $\wedge$  tidak terpenuhi, karena hanya berlaku bahwa  $a \otimes (b \wedge c) \leq (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$ . Sifat distributif  $\otimes$  terhadap  $\wedge$  dalam semiring idempoten lengkap dapat terpenuhi apabila diberikan syarat cukup, yaitu elemen  $a$  mempunyai invers, maka  $a \otimes (b \wedge c) = (a \otimes b) \wedge (a \otimes c)$ . Dengan adanya kondisi tersebut, maka dapat didefinisikan suatu operasi baru yang memiliki sifat operasi pergandaannya distributif terhadap  $\wedge$ . Hardouin memperkenalkan duality dari operasi pergandaan  $\otimes$  yaitu dual produk  $\square$  yang memiliki sifat operasi  $\square$  distributif terhadap  $\wedge$ . Selain dual produk pada semiring idempoten, diberikan juga dual produk pada semiring idempoten matrik yang dinotasikan  $A \square X$ , didefinisikan operasi  $(A \square X)_{ij} = \wedge_{k=1,2,\dots,n} (a_{ik} \square x_{kj})$  dengan  $\wedge$  merupakan batas bawah terbesar.

Selanjutnya, mengenai persamaan fixed point dalam lattice lengkap juga dapat diterapkan dalam semiring idempoten lengkap. Apabila diberikan semiring idempoten lengkap  $S$  dan pemetaan isoton  $f : S \mapsto S$  maka dapat dihimpun himpunan tak

kosong  $\{x \in S \mid f(x) = x\}$ . Karena adanya relasi urutan pada  $S$ , maka dapat pula dihimpun himpunan tak kosong  $\{x \in S \mid f(x) \leq x\}$  dan  $\{x \in S \mid f(x) \geq x\}$ . Dalam kasus matrik, juga dapat dihimpun himpunan tak kosong  $\left\{ \begin{matrix} X \in S^{n \times m} \mid f(X) = X \\ X \in S^{n \times m} \mid f(X) \leq X \\ X \in S^{n \times m} \mid f(X) \geq X \end{matrix} \right\}$  dengan  $f$  pemetaan isoton. Apabila sebelumnya diteliti mengenai solusi pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dengan mendefinisikan pemetaan isoton  $L_A : X \mapsto A \otimes X$  maka dengan sifat isoton pemetaan  $L_A$ , dapat dihimpun himpunan tak kosong  $\{X \in S^{n \times m} \mid L_A(X) = X\}$  dan himpunan tak kosong  $\{X \in S^{n \times m} \mid L_A(X) \leq X\}$ .

Penelitian dilanjutkan tentang bagaimana solusi terkecil dari pertidaksamaan  $A \square X \geq B$  dengan mendefinisikan pemetaan isoton  $\wedge_A : X \mapsto A \square X$  maka dengan sifat isoton pada pemetaan  $\wedge_A$  dapat dihimpun himpunan tak kosong  $\{X \in S^{n \times m} \mid \wedge_A(X) = X\}$  dan himpunan tak kosong  $\{X \in S^{n \times m} \mid \wedge_A(X) \geq X\}$ . Dengan terjaminnya adanya  $X$  yang memenuhi pertidaksamaan  $L_A(X) \leq X$  dan  $\wedge_A(X) \geq X$  serta adanya karakteristik  $X \geq A \otimes X \Leftrightarrow X \leq A \setminus X \Leftrightarrow X = A * \otimes X \Leftrightarrow X = A * \setminus X$  dan  $X \leq B \square X \Leftrightarrow X \geq B \bullet X \Leftrightarrow X = B_* \square X \Leftrightarrow X = B_* \bullet X$ , maka penulis dapat meneliti bagaimana karakteristik solusi  $X$  yang memenuhi pertidaksamaan  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$ .

**Metode Penelitian**

Pertama, dipelajari mengenai teori semiring terutama pada pengertian dan sifat dari semiring idempoten lengkap  $S$ . Kemudian diteliti apakah ada hubungan antara semiring idempoten lengkap dan lattice lengkap. Setelah diketahui ternyata kesamaan struktur antara semiring idempoten lengkap dan lattice lengkap, dipahami teori residuasi yang berlaku dalam lattice lengkap, khususnya definisi pemetaan lower semi-continuous dan pemetaan upper-semicontinuous, definisi dan sifat pemetaan residuasi dan dual pemetaan residuasi. Karena adanya kesamaan struktur antara semiring idempoten lengkap dan lattice lengkap, maka berdasarkan definisi pemetaan lower semi-continuous dan pemetaan

upper-semicontinuous yang berlaku dalam lattice lengkap, juga dapat didefinisikan dalam semiring idempoten lengkap. Begitupula dengan sifat - sifat pemetaan residuasi dan dual pemetaan residuasi berlaku dalam semiring idempoten lengkap. Dengan demikian, teori residuasi dapat digunakan untuk memperoleh solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dan solusi terkecil dari pertidaksamaan  $A \square X \geq B$  dengan matriks  $A, B, X$  atas semiring idempoten lengkap.

Selanjutnya, didefinisikan pemetaan closure dan sifatnya digunakan untuk memperoleh solusi terkecil pertidaksamaan  $A \square X \geq B$ . Penelitian kemudian dilanjutkan mencari solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dengan menggunakan sifat sifat dari pemetaan residuasi. Pertama diteliti terlebih dahulu terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dimana matriks  $A \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times 1}$ . Selanjutnya, diteliti solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dimana matriks  $A \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times n}$  dan solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dimana matriks  $A \in S^{n \times p}$  dan  $X \in S^{p \times m}$ .

Kemudian ditinjau mengenai operasi pergandaan yang dilengkapkan dalam semiring idempoten. Karena sifat distributif operasi pergandaan terhadap operasi  $\wedge$ , maka didefinisikan operasi baru yang dinamakan dual produk pada suatu semiring dan dual produk pada matriks atas semiring. Penelitian dilanjutkan mengenai solusi terkecil pertidaksamaan  $A \square X \geq B$  dengan membentuk dual pemetaan residuasi  $X \mapsto A \square X$ . Setelah itu, dibuktikan mengenai karakteristik solusi dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$ . Dalam membahas mengenai karakteristik solusi dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$ , diperlukan pemahaman mengenai persamaan dan pertidaksamaan fixed point, maka ditinjau terlebih dahulu definisi dan sifat dari persamaan dan pertidaksamaan fixed point.

Dalam jurnal yang dibahas Hardouin dan Quergui membahas mengenai solusi terbesar dari pertidaksamaan  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$  dan  $X \leq G$  namun disyaratkan matriks  $B$  entri - entrinya dalam grup reticulated. Hal ini dikarenakan adanya sifat distributif operasi pergandaan  $\otimes$  terhadap operasi  $\wedge$  yang terjamin dalam grup reticulated. Namun, dalam tesis ini telah didefinisikan operasi dual produk  $\square$  yang memiliki sifat distributif terhadap operasi  $\wedge$ , maka syarat matrik  $B$  yang entri - entrinya dalam grup reticulated dapat

diperlemah menjadi matrik yang entri - entrinya semiring idempoten lengkap. Sehingga memunculkan teorema baru akibat perlemahan syarat entri - entri matrik pada pertidaksamaan  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$ .

## Teori

### Teori Residuasi

Residuasi bertujuan untuk mencari solusi tunggal persamaan  $f(x) = b$  dengan menggunakan proses inversi ("inverting") pemetaan isoton  $f$  dari semiring idempoten lengkap  $C$  ke semiring idempoten lengkap  $D$ .

1.  $f$  tidak surjektif  $\Rightarrow f(x) = b$  tidak mempunyai solusi untuk suatu nilai  $b$ .
2.  $f$  tidak injektif  $\Rightarrow f(x) = b$  mempunyai solusi tidak tunggal.

Solusi  $f(x) = b$  merupakan subsolusi  $f(x) = b$ , yaitu nilai  $x$  yang memenuhi  $f(x) \leq b$  dan supersolusi  $f(x) = b$ , yaitu nilai  $x$  yang memenuhi  $f(x) \geq b$ .

Berikut ini merupakan langkah - langkah yang digunakan dalam mencari subsolusi  $f(x) = b$ :

1. Himpunan subsolusi tidak kosong.
2. Pilih batas atas dari himpunan subsolusi.
3. Jika batas atasnya ada, maka perlu dicek apakah batas atas tersebut merupakan subsolusi  $f(x) = b$ . Dengan kata lain, himpunan bagian subsolusi  $f(x) = b$  memuat elemen maksimum, yang selanjutnya dinotasikan  $f^\#(b)$  sehingga dapat diperoleh  $f^\#(b) = \bigoplus_{\{x | f(x) \leq b\}} x$  dan  $f(f^\#(b)) \leq b$
4. Setelah memperoleh elemen maksimum dari himpunan bagian subsolusinya, dapat dicek apakah elemen maksimumnya, dalam hal ini  $f^\#(b)$ , memenuhi persamaan  $f(x) = b$ . Jika ya, maka  $f^\#(b)$  merupakan solusi persamaan  $f(x) = b$ .

Selain dengan mencari subsolusi  $f(x) = b$ , dalam mencari solusi  $f(x) = b$  dapat juga dengan mencari supersolusi  $f(x) = b$ , yaitu nilai  $x$  yang memenuhi  $f(x) \geq b$  dengan langkah - langkah sebagai berikut :

1. Jika himpunan bagian supersolusi tidak kosong, maka dapat dipilih batas bawah dari himpunan supersolusi  $f(x) = b$ .
2. Jika batas bawahnya ada, maka perlu dicek

apakah batas bawah tersebut merupakan supersolusi  $f(x) = b$ . Dengan kata lain, himpunan bagian supersolusi  $f(x) = b$  memuat elemen minimum, yang selanjutnya dinotasikan  $f^\#(b)$  sehingga dapat diperoleh

$$f^b(b) = \bigoplus_{\{x|f(x) \geq b\}} x \text{ dan } f(f^b(b)) \leq b$$

3. Setelah memperoleh elemen minimum dari himpunan bagian supersolusinya, dapat dicek apakah elemen minimumnya, dalam hal ini  $f^b(b)$ , memenuhi persamaan  $f(x) = b$ .
4. Jika ya, maka  $f^b(b)$  merupakan solusi persamaan  $f(x) = b$ .

**Definisi 3.1.** Diberikan himpunan terurut  $D$  dan  $E$  dan relasi urutan  $\leq$ . Pemetaan yang mengawetkan urutan  $f: D \rightarrow E$  dikatakan **pemetaan residuasi** jika untuk setiap  $y \in E$ , batas atas terkecil dari himpunan bagian  $\{x \in D | f(x) \leq y\}$  ada dan merupakan anggota dari himpunan bagian tersebut (elemen maksimumnya ada), elemen maksimumnya dinotasikan  $f^\#(y)$ . Elemen  $x$  yang memenuhi persamaan  $f(x) \leq y$  dinamakan subsolusi persamaan  $f(x) = y$ .

**Definisi 3.2.** Pemetaan  $g$  dikatakan **dual pemetaan residuasi** jika untuk setiap  $y \in E$ , batas bawah terbesar dari himpunan bagian  $\{x \in D | g(x) \geq y\}$  ada dan merupakan anggota dari himpunan bagian tersebut (elemen minimumnya ada), elemen minimumnya dinotasikan  $g^b(y)$ . Elemen  $x$  yang memenuhi persamaan  $g(x) \geq y$  dinamakan supersolusi persamaan  $g(x) = y$ .

**Teorema 3.3.** Jika diberikan pemetaan isoton  $f: E \mapsto F$  dengan  $E, F$  adalah semiring idempoten lengkap, elemen bottom dari  $E$  dinotasikan  $\varepsilon_E$ , elemen top dari  $E$  dinotasikan  $T_E$  maka pernyataan berikut ekuivalen :

1. Pemetaan  $f$  merupakan pemetaan residuasi
2.  $f(\varepsilon_E) = \varepsilon_F$  dan  $f(\bigoplus_{x \in X} x) = \bigoplus_{x \in X} f(x)$  untuk setiap  $X \subseteq E$  ( yaitu  $f$  merupakan lower – semicontinuous).
3.  $f(T_E) = T_F$  dan  $f^\#(\bigwedge_{y \in Y} y) = \bigwedge_{y \in Y} f^\#(y)$  untuk setiap  $Y \subseteq F$  ( yaitu  $f^\#$  merupakan upper – semicontinuous).

**Teorema 3.4.** Jika diberikan pemetaan isoton  $g: E \mapsto F$  dengan  $E, F$  adalah semiring idempoten lengkap, elemen bottom dari  $F$  dinotasikan  $\varepsilon_F$ , elemen top dari  $F$  dinotasikan  $T_F$  maka pernyataan berikut ekuivalen :

1. Pemetaan  $g$  merupakan dual pemetaan residuasi
2.  $g(T_E) = T_F$  dan  $g(\bigwedge_{x \in X} x) = \bigwedge_{x \in X} g(x)$  untuk setiap  $X \subseteq E$  ( yaitu  $g$  merupakan upper – semicontinuous).
3.  $g(\varepsilon_E) = \varepsilon_F$  dan  $g^b(\bigoplus_{y \in Y} y) = \bigoplus_{y \in Y} g^b(y)$  untuk setiap  $Y \subseteq F$  ( yaitu  $g^b$  merupakan lower – semicontinuous).

### Pemetaan Closure

Dalam bagian ini, diuraikan mengenai pemetaan closure dan hubungannya dengan pemetaan residuasi dan dual pemetaan residuasi.

**Definisi 3.5.** Diberikan semiring idem-poten  $S$  dan pemetaan isoton  $h: S \mapsto S$ . Jika  $h \circ h = h \geq Id_S$  maka  $h$  merupakan pemetaan closure. Jika  $h \circ h = h \leq Id_S$  maka  $h$  merupakan dual pemetaan closure.

**Teorema 3.6.** Diberikan semiring  $S$ . Jika pemetaan  $h: S \mapsto S$  merupakan pemetaan residuasi, maka berlaku sifat berikut :

1.  $h$  merupakan pemetaan closure
2.  $h^\#$  merupakan dual pemetaan closure
3.  $h \circ h^\# = h^\#$
4.  $h^\# \circ h = h$

**Solusi Terbesar Pertidaksamaan**  $A \otimes X \leq B$  dengan  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$

Untuk mencari solusi pertidak-samaan  $A \otimes X \leq B$  dengan  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$  menggunakan teori residuasi. Dalam memperoleh solusi pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dengan  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$  sebagai berikut:

Diberikan semiring idempoten lengkap  $S$ , matrik  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$ . Didefinisikan pemetaan  $L_A: S^{n \times p} \rightarrow S^{n \times m}$  yaitu :

$$L_A: X \mapsto A \otimes X \quad (1)$$

Secara umum, solusi pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$

untuk  $A \in S^{n \times p}$ ,  $X \in S^{p \times m}$  dan  $B \in S^{n \times m}$  adalah

$$\begin{aligned} [L_A^\#(B)]_{ik} &= \wedge_{j=1}^n (A_{ji} \setminus b_{jk}) \\ &\equiv [A \setminus B]_{ik} \end{aligned}$$

Karena untuk setiap  $B \in S^{n \times m}$ , terdapat elemen maksimal  $L_A^\#(B)$  yang  $A \otimes X \leq B$  maka dapat dibentuk pemetaan isoton  $L_A^\# : S^{n \times m} \rightarrow S^{p \times m}$ . Selanjutnya, pemetaan  $L_A^\#$  yang didefinisikan untuk setiap  $X \in S^{n \times m}$

$$\begin{aligned} L_A^\# : S^{n \times m} &\rightarrow S^{p \times m} \\ X &\mapsto A \setminus X \end{aligned}$$

dengan  $[A \setminus X]_{ik} = \wedge_{j=1}^n (A_{ji} \setminus x_{jk})$  dikatakan residual pemetaan  $L_A$  dengan  $A \in S^{n \times p}$ .

**Solusi Terkecil Pertidaksamaan**  $A \square X \geq B$  dengan  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$

**Dual Produk**

Sifat distributif pergandaan  $\square$  terhadap  $\wedge$  tidak terpenuhi dalam semiring idempoten secara umum, diperlukan syarat cukup bahwa semiring idempoten merupakan semifield. Hal ini memunculkan definisi operasi  $\square$  yang dinamakan dual produk.

**Definisi 5.1.** Diberikan semiring idempoten lengkap  $S$ . Dual produk dalam  $S$  dinotasikan  $\square$  merupakan operasi biner yang diasumsikan memiliki sifat

1. Operasi  $\square$  memenuhi sifat asosiatif.
2.  $(S, \square)$  mempunyai elemen netral  $e$ .
3. Operasi  $\square$  bersifat distributif terhadap  $\wedge$  dari elemen tak hingga, yaitu  $\forall a_i \in S, (\wedge_{i \in I} a_i) \square b = \wedge_{i \in I} (a_i \square b)$
4. Elemen top  $T$  sebagai elemen penyerap terhadap operasi  $\square$ , yaitu  $(\forall a \in S, T \square a = a \square T = T)$

Selanjutnya, akan diberikan definisi dual produk matrik sebagai berikut :

**Definisi 5.2.** Diberikan semiring idempoten lengkap  $S$ . Matrik  $A \in S^{n \times p}, B \in S^{p \times m}$ , maka  $A \square B$  didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (A \square B)_{ij} &= \wedge_{k=1,2,\dots,p} (a_{ik} \square b_{kj}) \\ &\text{untuk setiap } i = 1, 2, \dots, n \text{ dan } j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

**Solusi Terkecil Pertidaksamaan**  $A \square X \geq B$  dengan  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$

**Teorema 5.3** Diberikan semiring idempoten lengkap  $S$  dan matrik  $A \in S^{n \times p}$ . Pemetaan

$$\begin{aligned} \wedge_A : S^{p \times m} &\mapsto S^{n \times m} \\ X &\mapsto A \square X \end{aligned}$$

merupakan dual pemetaan residuasi dan dual residualnya dapat dinotasikan

$$\begin{aligned} \wedge^b : S^{n \times m} &\mapsto S^{p \times m} \\ X^A &\mapsto A \bullet X \end{aligned}$$

dengan definisi operasi

$$\begin{aligned} [A \bullet X]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^n (A_{ki} \bullet x_{kj}) \quad (2) \\ \text{serta } T \bullet x &= \varepsilon, \varepsilon \bullet x = T, \text{ dan } \varepsilon \bullet \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

**Hasil dan Pembahasan**

**Persamaan dan Pertidaksamaan Fixed Point**

**Definisi 6.1.** Diberikan himpunan  $A$  dan fungsi  $f : A \mapsto A$ . Elemen  $a \in A$  dikatakan **fixed point** dari fungsi  $f$  jika  $f(a) = a$ . Lebih lanjut,  $a$  dapat dikatakan solusi atau penyelesaian dari persamaan fixed point  $x = f(x)$ . Ketika himpunan  $A$  dilengkapi dengan relasi urutan  $\leq$ , dapat didefinisikan **prefixed point** dari fungsi  $f$ , yaitu  $a \in A$  dikatakan **prefixed points** dari fungsi  $f$  jika  $f(a) \leq a$ . Selain itu, dapat juga didefinisikan post-fixed point dari fungsi  $f$ , yaitu  $a \in A$  dikatakan **post-fixed points** dari fungsi  $f$  jika  $f(a) \geq a$ .

Karena semiring idempoten lengkap  $S$  merupakan himpunan terurut dengan relasi urutan  $\leq$  maka dapat didefinisikan persamaan fixed point dari pemetaan isoton  $f : S \rightarrow S$  sebagai berikut:

$$f(x) = x \quad (3)$$

dan pertidaksamaan fixed point dari pemetaan isoton  $f : S \rightarrow S$  sebagai berikut:

$$f(x) \leq x \quad (4)$$

$$f(x) \geq x \quad (5)$$

**Kleene Star**

**Definisi 6.2.** Diberikan semiring idem-poten lengkap  $S$ . Kleene star merupakan pemetaan.

$$k : S \mapsto S, a \mapsto a^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} a^i$$

dengan  $a^{i+1} = a \otimes a^i$  dan  $a^0 = e$ .

Kleene star juga dapat diaplikasikan ke matrik bujur sangkar dalam semiring idempoten lengkap.

**Definisi 6.3.** Diberikan  $S$  semiring idem-poten lengkap. Kleene Star dari matrik  $A \in S^{n \times n}$  didefinisikan

$$K : S^{n \times n} \mapsto S^{n \times n}, A \mapsto A^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i$$

dengan  $A^0 = E$ ,  $E$  matrik identitas dan  $A^k = A \otimes A^{k-1}$ .

**Sifat 6.4.** Diberikan  $S$  semiring idem-poten lengkap. Matrik  $A \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times p}$ . Pemetaan  $L_{A^*} : S^{n \times p} \rightarrow S^{n \times p}, X \mapsto A^* \otimes X$  merupakan pemetaan closure, oleh karena itu,

$$A^* \otimes A^* \otimes X = A^* \otimes X$$

Sebagai akibatnya, pernyataan berikut ekuivalen :

$$X = A^* \otimes X \Leftrightarrow X \in \text{Im } L_{A^*} \tag{3}$$

**Lemma 6.5.** Diberikan semiring idempoten lengkap  $S$  dan matrik  $A \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times p}$  Pernyataan berikut ekuivalen :

1.  $X \leq A \setminus X$
2.  $X \geq A \otimes X$
3.  $X = A^* \otimes X$
4.  $X = A^* \setminus X$

**Dual Kleene Star**

Dalam definisi Kleene Star dijelaskan Kleene Star merupakan jumlahan  $\bigoplus$  tak hingga suatu elemen dalam semiring idempoten lengkap, Berikut duality dari Kleene Star yaitu dual Kleene Star yang merupakan meet  $\wedge$  tak hingga suatu elemen dalam semiring idempoten lengkap.

**Definisi 6.6.** Diberikan semiring idem-poten lengkap  $S$ . Dual Kleene Star merupakan pemetaan

$$l : S \mapsto S, b \mapsto b_* = \bigwedge_{i=0}^{\infty} b^{\square i}$$

dengan  $b^{\square i+1} = b \square b^{\square i}$  dan  $b^{\square 0} = e$

Selanjutnya, pendefinisian dual star dapat pula diaplikasikan dalam kasus ma-trik, sebagaimana dijelaskan mengenai dual star pada matrik.

**Definisi 6.7.** Diberikan  $S$  semiring idem-poten lengkap. Dual Kleene Star dari ma-trik  $B \in S^{n \times n}$  didefinisikan:

$$B_* = \bigwedge_{k=0}^{\infty} B^{\square k}$$

dengan  $B^{\square i+1} = B \square B^{\square i}$  dan  $B^{\square 0} = E$

**Sifat 6.8.** Diberikan  $B \in S^{n \times n}$ . Pemetaan  $\wedge_{B_*}$  merupakan pemetaan upper semicontinuous dan menurut Definisi 5.6., pemetaan

$$\wedge_{B_*} : S^{n \times p} \mapsto S^{n \times p}, X \mapsto B_* \square X$$

merupakan dual pemetaan closure. Oleh karena itu,

$$B_* \square B_* \square X = B_* \square X \tag{4}$$

Sehingga berakibat

$$X = B_* \square X \Leftrightarrow X \in \text{Im } \wedge_{B_*} \tag{5}$$

**Proposisi 6.9.** Diberikan semiring  $S$  dan matrik  $B \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times p}$ , maka pernyataan ini ekuivalen :

1.  $X \leq B \square X$
2.  $X \geq B \bullet X$
3.  $X = B_* \bullet X$
4.  $X = B_* \square X$

**Proposisi 6.10.** Diberikan semiring idempoten lengkap  $S$  dan  $A, B \in S^{n \times n}$  dan  $X \in S^{n \times m}$ . Pernyataan berikut ekuivalen :

$$A \otimes X \leq X \leq B \square X \Leftrightarrow X \in \text{Im } L_{A^*} \cap \text{Im } \wedge_{B_*}$$

**Proposisi 6.11.** Diberikan semiring idempoten lengkap  $S$ , dan matrik  $A, B, G \in S^{n \times n}$ . Solusi terbesar  $X$  yang memenuhi

$$A \otimes X \leq X \leq B \square X \text{ dan } X \leq G$$

adalah

$$X = ((B_* \bullet A^*)^*) \setminus G$$

**Bukti :**

1. Akan ditunjukkan  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$  dan  $X \leq G \Rightarrow X \leq \hat{X}$ . Berdasarkan Proposisi 6.10,

$$A \otimes X \leq X \leq B \square X \Leftrightarrow X \in \text{Im } L_{A^*} \cap \text{Im } \wedge_{B_*}.$$

Hal ini berarti  $X$  harus memenuhi  $X = B_* \bullet (A^* \otimes X)$ .

$$X = B_* \bullet (A^* \otimes X)$$

$$\Leftrightarrow X = (B_* \bullet A^*) \otimes X$$

$$\Leftrightarrow X = ((B_* \bullet A^*)^*) \setminus X$$

Dengan demikian,  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$  dan

$X \leq G \Rightarrow X = ((B_* \bullet A^*)^*) \setminus X$  dan  $X \leq G$ .  
Diperhatikan bahwa berdasarkan Teorema 6.5,

$$X = ((B_* \bullet A^*)^*) \setminus X \Leftrightarrow (B_* \bullet A^*) \otimes X \leq X.$$

Karena  $(B_* \bullet A^*) \otimes X \leq X$  dan  $X \leq G$  maka  $X \leq \hat{X} = ((B_* \bullet A^*)^*) \setminus G$ .

2. Akan ditunjukkan  $\hat{X} \leq G, \hat{X} = A^* \otimes \hat{X}$ .

Pertama akan ditunjukkan  $\hat{X} \in \text{Im}L_{A^*}$  yang

ekuivalen dengan  $\hat{X} = A^* \otimes \hat{X} = A^* \setminus \hat{X}$ .

Berdasarkan Lemma 6.5,  $\hat{X}$  memenuhi  $(B_* \bullet A^*) \otimes \hat{X} \leq \hat{X} \leq (B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X}$  (9)

Karena  $L_{A^*}$  pemetaan isoton dan

$$\hat{X} \leq (B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X}, \quad \text{maka}$$

$A^* \otimes \hat{X} \leq A^* \otimes ((B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X})$ . Sehingga didapat

$$A^* \setminus \hat{X} \geq A^* \setminus ((B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X})$$

Diperhatikan

$$\begin{aligned} A^* \setminus ((B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X}) &= ((B_* \bullet A^*) \otimes A^*) \setminus \hat{X} \\ &= (B_* \bullet (A^* \otimes A^*)) \setminus \hat{X} \\ &= (B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X} \end{aligned}$$

Akibatnya, didapat  $A^* \setminus \hat{X} \geq (B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X}$ .

Menurut pertidaksamaan 9,

$$(B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X} \geq \hat{X}. \quad \text{Akibatnya,}$$

$A^* \setminus \hat{X} \geq (B_* \bullet A^*) \setminus \hat{X} \geq \hat{X}$ . Jadi diperoleh

$A^* \setminus \hat{X} \geq \hat{X}$ . Selanjutnya,  $\hat{X} \geq A^* \setminus \hat{X}$

(karena  $A^* \geq E$ ) maka  $A^* \setminus \hat{X} = \hat{X}$ ., yaitu

$$\hat{X} \in \text{Im}L_{A^*}.$$

Kedua, akan ditunjukkan  $\hat{X} \in \text{Im}\wedge_{B_*}$ , yaitu

$$\hat{X} = B_* \square \hat{X} = B_* \bullet \hat{X}.$$

Dari persamaan 9. didapat

$$\hat{X} \geq (B_* \bullet A^*) \otimes \hat{X} = B_* \bullet (A^* \otimes \hat{X}) = B_* \bullet \hat{X}$$

(karena  $\hat{X} = A^* \otimes \hat{X}$ ). Di sisi lain,

$B_* \leq E^\square$ . Karena  $\wedge_{B_*}$  pemetaan isoton,

$$\text{maka } B_* \square \hat{X} \leq E^\square \square \hat{X}.$$

Dengan demikian, didapat  $\hat{X} \leq B_* \bullet \hat{X}$ . Sehingga

$$\hat{X} = B_* \bullet \hat{X} = B_* \square \hat{X}.$$

Ketiga karena  $(B_* \bullet A^*)^* \geq E$ , maka

$$(B_* \bullet A^*)^* \square G \geq E \square G.$$

Akibatnya, didapat  $(B_* \bullet A^*)^* \setminus G \leq G$ . Jadi  $\hat{X} \leq G$ .

## Simpulan

Secara garis besar, dapat disimpulkan bahwa kesamaan struktur semiring idempoten lengkap dengan lattice lengkap memberikan banyak keuntungan dalam menyelesaikan pertidaksamaan atas semiring idempoten dengan menggunakan teori residuasi. Diberikan  $S$  semiring idempoten lengkap, maka didapat

1. Solusi pertidaksamaan  $A \otimes X \leq B$  dengan  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$  adalah  $\wedge_{j=1}^n (A_{ji} \setminus b_{jk}) = [A \setminus B]_{ik}$ .
2. Solusi pertidaksamaan  $A \square X \geq B$  dengan  $A \in S^{n \times p}$  dan  $B \in S^{n \times m}$  adalah  $(A \bullet X)_{ij} = \oplus_{k=1}^n (A_{ki} \bullet x_{kj})$ .
3. Solusi pertidaksamaan  $A \otimes X \leq X \leq B \square X$  dan  $X \leq G$  dengan  $A, B, G \in S^{n \times n}$  dapat diperoleh dengan menggunakan formula  $\hat{X} = ((B_* \bullet A^*)^*) \setminus G$ .

## Pustaka

- [1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, J., dan Quadrat, J.P., 1992, *Synchronization and Linearity*, An Algebra for Discrete Event Systems, John Wiley and Sons, New York
- [2] Gaubert, S., 1997, *Methodes and Application of (max,+) Linear Algebra*, Rapport de Recherche.
- [3] Hardouin, L., Cottenceau, B., Le Corronc, E., 2010, *Control of uncertain (max,+) -linear system in order to decrease uncertainty*, University of Angers
- [4] Hardouin, L., Cottenceau, B., Le Corronc, E., 2010, *On The Dual Product and The Dual Residua-tion over Idempotent Semiring of Intervals*, University of Angers, Perancis
- [5] Judson, T.W., 2010, *Abstract Algebra : Theory and Applications*, Stephen F. Austin State University.
- [6] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cot-tenceau, B., 2009, *Disturbance Decoupling of Timed Event Graphs by Output Feedback Controller*, University of Angers
- [7] Houssin, L., Lahaye, S., dan Boimond, J.L., (2008), *Control of (Max,+) - Linear Sys-tems Minimizing Delays*, University of Angers, Perancis
- [8] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cot-tenceau, B., Maia, C.A., 2010, *Observer Design for (max,plus) Linear Systems*, IEEE Transaction

- on Automatic Control vol. 55-2
- [9] Ouerghi, I., dan Hardouin, L., 2006, *Control Synthesis for P-Temporal Event Graphs*, International Workshop on Discrete Event Systems, An Arbor, USA
- [10] Tarski, A., 1955, *A Lattice Theoretical Fixed Point Theorem and Its Applications*, Pacific Journal of Mathematics 5 no.2 285-305
- [11] Andersen, M. H., 2002, *Max – plus Algebra: Properties and Applications*, Lamarie, WY
- [12] Brunch, T., Hardouin, L., dan Raisch, J., 2011, *Modeling Control of Nested Manufacturing Processes Using Dioid Models*, In Peprints of the 3rd International Workshop on Dependable Control of Discrete Systems, Jerman
- [13] Brunch, T , Hardouin, L., Boutin, O., Cottenceau, B., Raisch, J., 2013, *Discrete Event Systems in a Dioid Framework: Control Theory, Control of Discrete Event Systems*, Volume 433 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin
- [14] Brunsch, T., 2014, *Dissertation : Modeling and Control of Complex Systems in A Dioid Framework*, Berlin
- [15] Cohen, G., Gaubert, S., dan Quadrat, J.P., 1998, *Max plus Algebra and System Theory : Where We Are and Where to Go Now*, IFAC Conference on Systems and Control