

**MODEL MATEMATIK ANGKUTAN LIMBAH PADA SALURAN TERBUKA**

**Didik Purwantoro**

Staf Pengajar Fakultas Teknik UNY

**ABSTRACT**

This research is aimed to know the process of waste transportation on the open-channel using numerical model. This model is chosen because of some reasons, for example the complication of the river tissue, the influence of ebb which causes difficulty to conduct analytical problem solving. The other excess of this numerical model is cheaper and easier than conducting measurement of waste rate in the field.

The equation of waste transportation can be formulated as the two physics phenomenon, i.e. advection and diffusion process or long dispersion of river. In the solving of equation of waste transportation, each of the components was analyzed separately. The advection part was done first, and the diffusion part was finished then. The advection equation was done using Lagrange interpolation, and the diffusion equation was done using differential method to explicit scheme.

The result of the research shows that the use of Lagrange interpolation up to order 4 is still be good enough to finish advection equation for number Courant 1, 0,75 and 0,5. For number Courant 0.25, numerical mistake causing concentration degradation of 2.3 %. In the diffusion equation, the result of computation using differential method up to explicit scheme yielding degradation of waste concentration from 10 gr/l become 4,96 gr/l for the diffusion coefficient of  $K_x = 10 \text{ m}^2/\text{sc}$  and become 3,73 gr/l for the diffusion coefficient of  $K_x = 20 \text{ m}^2/\text{sc}$ .

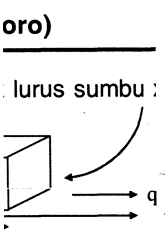
**PENDAHULUAN**

Proses pencampuran dan penyebaran partikel-partikel dari massa limbah yang larut di dalam aliran sungai merupakan permasalahan yang kompleks. Proses angkutan limbah dapat dianggap sebagai dua fenomena fisika yaitu adveksi dan difusi. Difusi adalah gerakan dari partikel yang biasa dinyatakan dengan hukum Fick dan persamaan difusi biasa. Adveksi adalah angkutan yang disebabkan oleh suatu arus aliran seperti yang terjadi pada sungai atau pantai (Luknanto, Dj., 1992)

Pembuatan model angkutan limbah dapat dilakukan dengan menggunakan

model matematik maupun model fisik. Model matematik dipilih karena mempunyai kelebihan di antaranya murah, pembuatan relatif singkat, mudah dikontrol dan diamati serta mampu menyesuaikan dengan bentuk bangunan yang tidak sederhana (Triatmaja, 2001).

Proses angkutan limbah pada saluran terbuka secara matematis dapat dianggap sama dengan bentuk persamaan diferensial parsial, yang dikenal dengan persamaan transpor massa. Transpor massa adalah proses hidrodinamis dari dispersi yang merupakan interaksi antara proses konveksi dan difusi turbulen. Kedua proses ini dipengaruhi oleh kecepatan aliran (Triatmodjo, B., 2001).



lurus sumbu :  
ontrol dalam a bah  
bahan terlaru  
ime kontrol te  
n massanya a  
 $\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x}$   
ini harus sama  
ng masuk dai  
a fluks masa  
x adalah  $q(x,t)$   
t luasan pada  
 $-\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \Delta x$ , Si  
keduanya  
ini harus sama  
massa dalam  
emberikan per  
sebagai berik  
 $\frac{\partial C}{\partial t} = - \dots$   
aan (1.5) ke  
jadi  
 $\frac{\partial C}{\partial t} = D$   
tis persamaa  
kut:  
 $\frac{M}{4\pi Dt} \exp - \dots$

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang persamaan angkutan limbah dengan metode beda hingga. Penelitian serupa yang dilakukan oleh Triatmodjo (2001) dengan menggunakan interpolasi polinomial order 3 menghasilkan ketelitian lebih baik. Pada penelitian ini dicoba metode yang akan memberikan kesalahan atau difusi numerik lebih kecil dengan cara mudah yaitu dengan metode interpolasi Lagrange order 4.

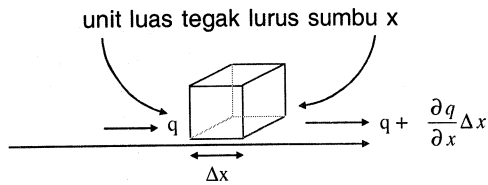
**DIFUSI**

Hukum Fick mengenai proses difusi satu dimensi dinyatakan sebagai berikut:

$$q = -D \frac{\partial C}{\partial x} \quad (1)$$

dengan  $q$  adalah fluks massa bahan terlarut,  $C$  adalah konsentrasi bahan terlarut,  $D$  adalah koefisien difusi dengan dimensi ( $L^2T^{-1}$ ). Tanda minus menunjukkan bahwa bahan terlarut terangkut dari tempat yang konsentrasi tinggi ke tempat konsentrasi rendah.

Kombinasi antara hukum Fick dan konservasi massa akan menghasilkan suatu persamaan yang menjelaskan proses difusi. Proses dinamika satu dimensi satu massa terangkut pada arah  $x$  dapat disederhanakan seperti pada Gambar 1. Pada gambar tersebut dua bidang sejajar dengan satu unit luasan yang tegak lurus sumbu  $x$  digambar dan terpisah dengan jarak  $\Delta x$ .  $C(x,t)$  adalah massa per unit volume pada titik  $x$  dan waktu  $t$ . Jadi dalam volume kontrol terdapat massa sebesar  $C(x,t) \Delta x$ .



Gambar 1. Volume kontrol dalam angkutan limbah

Karena molekul bahan terlarut masuk dan keluar dari volume kontrol tersebut, maka laju perubahan massanya adalah:

$$\frac{\partial (C \Delta x)}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial x} \Delta x \quad (2)$$

Laju perubahan ini harus sama dengan perbedaan fluks yang masuk dan keluar volume kontrol. Jika fluks massa melalui unit luasan pada titik  $x$  adalah  $q(x,t)$ , maka fluks massa tiap unit luasan pada titik  $x +$

$\Delta x$  adalah  $q(x,t) +$  , sehingga perbedaan antara keduanya adalah  $\frac{\partial q}{\partial x} \Delta x$ . Perbedaan ini harus sama dengan laju perubahan massa dalam volume kontrol, sehingga memberikan persamaan kontinuitas massa sebagai berikut:

$$(3)$$

Substitusi Persamaan (1.5) ke dalam Persaman (1.6) menjadi

$$(4)$$

Penyelesaian analitis persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$(5)$$

Dalam proses transpor massa yang mengalir diasumsikan bahwa proses difusi dan adveksi adalah dua proses terpisah dan dapat digabungkan. Hal ini berarti ada anggapan bahwa proses difusi dalam cairan yang mengalir dianggap sama dengan proses difusi dalam cairan diam. Dalam proses difusi molekuler dalam aliran laminar koefisien difusi ke segala arah sama nilainya.

Aliran laminar jarang dijumpai di lapangan. Proses difusi di dalam aliran turbulen dapat dianalogikan dengan proses difusi dalam aliran laminar. Perbedaannya adalah pada nilai koefisien difusinya. Nilai koefisien difusi turbulen biasanya lebih besar dibanding nilai koefisien difusi molekuler (Djoko Luknanto, 1992).

### MODEL NUMERIK PERSAMAAN TRANSPOR

Menurut Triatmodjo, B. (2001) dalam kondisi satu dimensi dan aliran seragam persamaan transpor massa dianggap mempunyai bentuk :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (6)$$

dengan U dan C adalah kecepatan rerata dan konsentrasi pada tampang aliran dan D adalah koefisien difusi longitudinal. Suku kedua pada persamaan (1) adalah menunjukkan proses konveksi dan suku ketiga adalah proses difusi.

Model penyelesaian persamaan transpor dibagi menjadi dua bagian, yaitu bagian konveksi dan difusi. Pertama kali persamaan konveksi diselesaikan lebih dulu, kemudian dilanjutkan dengan penyelesaian persamaan difusi.

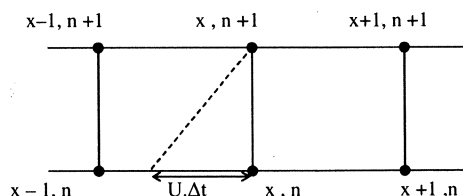
Pada proses konveksi dianggap bahwa koefisien difusi adalah sama dengan nol sehingga persamaan (6) menjadi :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

dapat ditulis sebagai  $\frac{\partial C}{\partial t} = - \frac{\partial C}{\partial x} U$  (8)

dengan  $\frac{\partial x}{\partial t} = U$  (kurva karakteristik)

persamaan tersebut di atas dapat diartikan bahwa suatu partikel yang berada di titik x pada saat t dan mempunyai kecepatan konstan U, akan berada di titik (x + U.D.t) pada saat (t + D.t) sehingga C(x, t + D.t) = C(x - U.D.t, t). Apabila harga D x = U.D.t, maka C(x, n + 1) akan sama dengan C(x - 1, n). Tetapi apabila harga D x < U.D.t maka harga C(x, n + 1) harus diinterpolasi antara dua titik yaitu C(x - 1, n) dengan C(x, n). Proses interpolasi ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2. Difusi numerik

Proses interpolasi antara dua titik ini akan menimbulkan kesalahan numerik atau difusi numerik. Oleh sebab itu proses interpolasi harus dilakukan secara hati-hati agar hasil interpolasinya menghasilkan kesalahan kecil.

Holly dan Preisman (dalam Luknanto, 1992) menyelesaikan persamaan (7) dengan interpolasi order 3 menggunakan dua titik. Hasil penelitiannya memiliki ketelitian cukup baik. Triatmodjo, B (2001) menyelesaikan persamaan (7) dengan interpolasi polinomial sampai dengan order 3 menggunakan 4 titik. Penelitian yang dilakukan menghasilkan kesalahan difusi numerik sangat kecil.

Proses difusi mempunyai persamaan

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (10)$$

Dengan skema eksplisit maka persamaan diferensi hingga satu dimensinya berbentuk :

$$C^{t+\Delta t} = C^t + D \frac{C_{x-\Delta x} + C_{x+\Delta x} - 2C_x}{\Delta x^2} \Delta t$$

dengan cara tersebut maka konsentrasi polutan pada waktu ke t dan jarak x dapat ditentukan.

### INTERPOLASI LAGRANGE

Interpolasi polinomial Lagrange adalah perumusan ulang dari interpolasi Newton Interpolasi Lagrange tidak menggunakan beda hingga dan dapat dikembangkan dari polinomial Newton. Secara umum interpolasi Lagrange memiliki bentuk persamaan:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

dengan

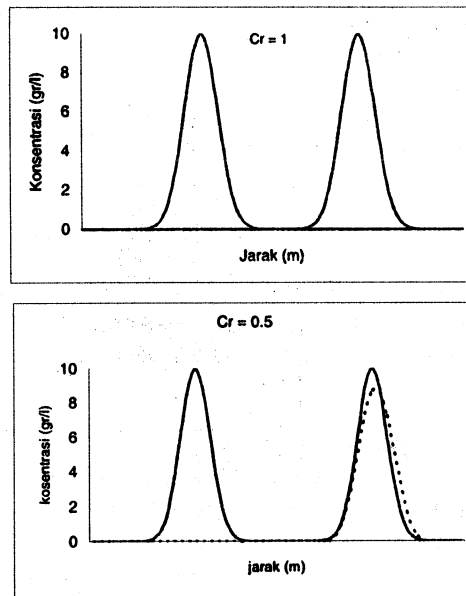
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

dengan simbol  $\prod$  adalah perkalian. Persamaan Lagrange memerlukan komputasi yang sama dengan polinomial Newton akan tetapi persamaan Lagrange lebih mudah dalam pembuatan programnya (Chapra, S.C 1989). Kemudahan pada metode interpolasi Lagrange adalah koefisien persamaan interpolasinya langsung dimasukkan ke dalam program tanpa dihitung satu persatu sebagaimana metode polinomial Newton. Pada penelitian ini persamaan konveksi diselesaikan dengan persamaan karakteristik, dengan interpolasi Lagrange order 3 dan order 4. Untuk persamaan difusi diselesaikan dengan

metode diferensi hingga skema eksplisit difersiasi maju.

### HASIL PENYELESAIAN PERSAMAAN ADVEKSI DAN DIFUSI

Metode karakteristik dengan interpolasi Lagrange order 3 diaplikasikan pada saluran panjang dengan kecepatan aliran (U) sebesar 2 m/d dan distribusi awal adalah distribusi normal, dengan konsentrasi maksimum adalah 10 gr/l. Bilangan Courant (Cr) digunakan 1. Hasil penelitian dapat digambarkan seperti pada gambar 2. Dari gambar tersebut tampak bahwa kesalahan numerik adalah nihil. Grafik polutan pada kondisi awal terulang pada grafik disebelahnya. Pada bilangan Courant (Cr) = 0,5 dengan kecepatan (U) 1 m/d ada kesalahan numerik sebesar 5,2 %.

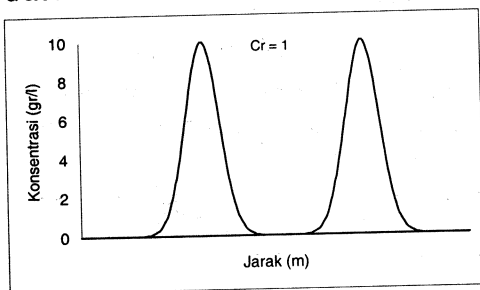


Gambar 3. Hasil penyelesaian persamaan konveksi order 3

Metode karakteristik dengan interpolasi Lagrange order 4 diaplikasikan pada saluran panjang dengan kecepatan aliran

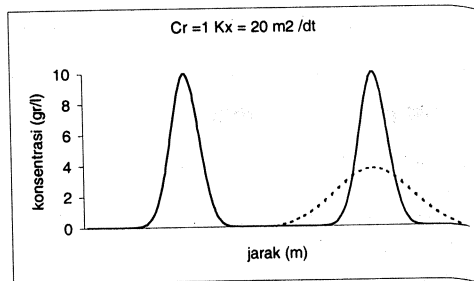
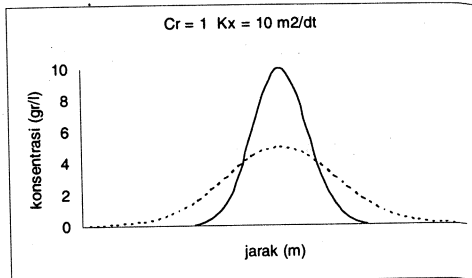
## Model Matematik Angkutan Limbah Pada..., (Didik Purwantoro)

(U) sebesar 2 m/d dan distribusi awal adalah distribusi normal, dengan konsentrasi maksimum adalah 10 gr/l. Bilangan Courant (Cr) digunakan 1. Hasil penelitian dapat digambarkan seperti pada gambar 2. Dari gambar tersebut tampak bahwa kesalahan numerik adalah nihil. Grafik polutan pada kondisi awal terulang pada grafik disebelahnya. Pada bilangan Courant (Cr) = 0,5 dengan kecepatan (U) adalah 1 m/d ada kesalahan numerik sebesar 2,1 %.



Gambar 4. Hasil penyelesaian persamaan konveksi order 4

Persamaan difusi diselesaikan dengan metode diferensi hingga skema eksplisit. Hasil hitungan menunjukkan adanya penurunan konsentrasi limbah dari sebesar 10 gr/l menjadi 4,96 gr/l pada  $K_x = 10 \text{ m}^2/\text{dt}$  dan menjadi 3,73 pada  $K_x = 20 \text{ m}^2/\text{dt}$ .



Gambar 5. Hasil penyelesaian persamaan difusi

## KESIMPULAN

Penggunaan metode interpolasi Lagrange cukup teliti dalam menyelesaikan persamaan konveksi. Penerapan metode interpolasi Lagrange order memberikan kesalahan difusi numerik sebesar 2,3 % pada  $Cr = 0,5$ . Pada  $Cr = 1$  penggunaan metode ini tidak menghasilkan kesalahan numerik. Penggunaan metode interpolasi Lagrange lebih mudah dalam penyusunan programnya.

Persamaan difusi diselesaikan dengan metode beda hingga skema eksplisit dengan koefisien difusi turbulen sebesar  $K_x = 10 \text{ m}^2/\text{dt}$  dan pada  $K_x = 20 \text{ m}^2/\text{dt}$ . Untuk koefisien difusi sebesar  $K_x =$

## Model Matematik Angkutan Limbah Pada..., (Didik Purwantoro)

10 m<sup>2</sup>/dt konsentrasi maksimum mengalami penurunan dari 10 gr/l menjadi 4,96 gr/l. Untuk koefisien sebesar Kx = 20 m<sup>2</sup>/dt konsentrasi maksimum mengalami penurunan dari 10 gr/l menjadi 3,73 gr/l.

### DAFTAR PUSTAKA

- Kustamar, 1995, *Model Matematik Angkutan Limbah Cair Konservatif (Antara Stasiun Kediri, sampai stasiun pengamatan Kertosono) Sungai Brantas Jawa*, Jurusan Teknik Sipil Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada.
- Luknanto, Dj, 1992, *Angkutan Limbah*, PAU Ilmu Teknik UGM, Yogyakarta.
- Steven C. Chapra, 1989, *Metode Numerik*, Penerbit Erlangga, Jakarta.
- Triatmaja, R., 2001, *Model Matematik*, Bahan Kuliah Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada Yogyakarta.
- Triatmojo, B, 1991, *Mekanika Fluida dan Hidrolika*, Jilid II, Bahan Kuliah Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada Yogyakarta.
- Triatmojo, B, 2001, *Penggunaan Metode Interpolasi Polinomial Untuk Mendapatkan Ketelitian Tinggi Dalam Penyelesaian Persamaan Transpor*, Forum Teknik Sipil UGM, No. page 27-40, Yogyakarta.
- Wignyosukarto, B, 1988, *Hidrolika*, Jilid II, Bahan Kuliah Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada Yogyakarta.
- Wignyosukarto, B, 1990, *Hidrolika Numerik*, PAU Ilmu Teknik Universitas Gadjah Mada Yogyakarta.

1. Artikel ya dalam bida melalui me
2. Penulisan jenis huruf halaman pe
3. Judul dituli
4. Nama Pen tempat bek
5. Abstrak dii Bahasa Ind hasil.
6. Kata kunci abstrak den
7. Sistematis (a) Bagian a (b) Bagian t works), analisis mengact pelaksar prospek (c) Bagian p pustaka.
8. Daftar pust: (a) Buku : na tempat te (b) Tulisan/a judul buk penerbit. (c) Jurnal/m: jurnal/ma tulisan. (d) Tulisan d: miring), p (e) Surat kab (f) Artikel da
9. Penerbitan : dikembalikan
10. Artikel dicetal Januari (edisi