PENERAPAN DIAGONALISASI MATRIKS DALAM GENETIKA TERAPAN

Oleh :
Kristina Wijayanti
(FPMIPA IKIP Yogyakarta)

Abstrak

Untuk mendapatkan bibit unggul pada tanaman dan hewan ternak, perlu dilakukan seleksi genetik. Sifat-sifat yang diinginkan pada varietas unggul diseleksi dari beberapa generasi. Tulisan ini bertujuan untuk menyajikan penerapan beberapa konsep dalam aljabar linier, khususnya nilai dan vektor eigen serta diagnonalisasi matriks, dalam genetika.

Pandang M suatu matriks bujursangkar yang dapat didiagonalkan. Dengan menggunakan konsep nilai dan vektor eigen serta diagonalisasi matriks dapat diperoleh prosedur untuk mendiagonalkan matriks M, sehingga dengan mudah dapat dihitung Mn, dengan n bilangan asli.

Jika diketahui distribusi genotip dan pola perkawinan dalam suatu populasi dapat diramalkan distribusi genotip tersebut setelah generasi ke-n. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan perhitungan diagonalisasi matriks yang komponen-komponennya dapat diperoleh dari peluang pemunculan genotip turunan ke-n untuk kombinasi dari kedua induk.

Pendahuluan

Banyak mahasiswa mengatakan bahwa konsep-konsep dalam aljabar linier bersifat abstrak dan tidak jelas manfaatnya. Tulisan ini bertujuan untuk menyajikan penerapan beberapa konsep dalam aljabar linier, khususnya nilai dan vektor eigen serta diagonalisasi matriks, dalam genetika terapan, yaitu pendugaan distribusi sifat pada generasi ke-n. Hal ini berguna untuk menunjukkan bahwa konsep-konsep tersebut bermanfaat untuk menyelesaikan masalah- masalah di dunia nyata. Dengan demikian, akan mengurangi kesan abstrak konsep itu sendiri.

Berikut ini disajikan konsep-konsep yang akan digunakan dalam contoh penerapannya.

Diagonalisasi Matriks

Jika M suatu matriks bujursangkar bukan hal yang mudah untuk menghitung M^n dengan n suatu bilangan asli. Akan tetapi jika M suatu matriks diagonal, dengan mudah dapat dihitung M^n. Oleh karena itu, jika M bukan matriks diagonal, harus dicari suatu cara untuk menghitung M^n

dengan mudah. Pada bagian ini, akan dikemukakan beberapa definisi dan teorema yang diperlukan untuk mendapatkan prosedur dalam menghitung Mn, dengan M suatu matriks yang dapat didiagonalkan. Karena teorema-teorema di sini bukanlah sesuatu yang baru, maka tidak akan dibuktikan kecuali pada teorema yang langkah buktinya diperlukan untuk pembicaraan berikutnya.

Definisi 1. Misalkan A suatu matris qxq. Vektor tak-nol x $\in \Phi^q$ disebut ***vektor eigen*** dari A jika Ax = λ x, untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut ***nilai eigen*** dari A dan x disebut ***vektor eigen yang bersesuian dengan*** λ..

Teorema berikut memberikan syarat cukup dan perlu agar λ merupakan nilai eigen.

Teorema 1. Jika A suatu matriks qxq, maka λ merupakan nilai eigen dari A jika dan hanya jika λ akar real dari persamaan karateristik det (A - λI) = 0.

Definisi 2. Suatu matriks bujursangkar A dikatakan ***dapat didiagonal-kan*** jika ada matriks P yang mempunyai invers sehingga P^{-1} AP matriks diagonal. Matriks P disebut ***mendiagonalkan*** A.

Kriteria bahwa suatu matriks bujursangkar dapat didiagonalkan tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 2. Jika A suatu matriks qxq, maka A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika A mempunyai q vektor eigen yang bebas linier.

Bukti

(----->) Misalkan A dapat didiagonalkan. Maka terdapat matriks P yang mempunyai invers sedemikian sehingga P^{-1}AP matriks diagonal. Misalkan P = $(P_{ij})_{qxq}$ dan P^{-1} AP = D dengan D = diag $(\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_q)$.

Maka AP = PD = $(P_{ij})_{qxq}$ diag $(\lambda_1,\lambda_2,....\lambda_q)$

= $(\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, ...\lambda_q p_q)$

dengan p_1, p_2,, ..p_q menyatakan vektor-vektor kolom dari P

Berarti $Ap_1 = \lambda_1 p_1$, dengan $1 \le i \le q$.

Karena P mempunyai invers maka vektor-vektor kolomnya semua tidak nol dan bebas linier. Akibatnya $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_q$ merupakan nilai-nilai eigen dari A dan p_1, p_2,, . . . , p_q vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Jadi A mempunyai q vektor eigen yang bebas linier.

(<------) Misalkan A mempunyai q vektor eigen yang bebas linier $p_1, p_2, ...,$ p_q dengan nilai-nilai eigen yang bersesuaian $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_q$

Misalkan P = (p_1,, p_2 .... p_q) yaitu matriks yang kolom-kolomnya p_1, p_2, p_q.Maka kolom-kolom dari AP adalah Ap_1,, Ap_2, ..., Ap_q . Karena

$A_{p1} = \lambda_1 P_1$, dengan $1 \le i \le q$ maka $AP = (\lambda_1 p_1 \lambda_2 p_2 ... \lambda_q p_q) = PD$ dengan $D = \text{diag}(\lambda_1 \lambda_2, ... \lambda_q)$.

Karena vektor-vektor kolom dari P bebas linier maka P mempunyai invers. Jadi $P^{-1} AP = D$.

Dari bukti di atas, diperoleh prosedur untuk mendiagonalkan matriks A yang dapat didiagonalkan sebagai berikut.

Langkah 1. Dicari nilai eigen dari matriks A, misalkan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ dengan $r \le q$.
Langkah 2. Dicari q vektor eigen yang bebas linier, misalkan $p_1, p_2, \ldots, p_q$
Langkah 3. Dibentuk matriks P yang mempunyai $p_1, p_2, \ldots, p_q$ sebagai vektor-vektor kolomnya.
Langkah 4. $P^{-1}AP$ matriks diagonal dengan entri diagonalnya nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan vektor-vektor eigen $p_1, p_2, \ldots, p_q$

Maka $P^{-1}AP = D$ untuk suatu matriks diagonal D, sehingga $A = PDP^{-1}$ dan akibatnya $A^n = PD^nP^{-1}$.

Pada bagian berikut ini, akan dikemukakan beberapa konsep dalam genetika yang diperlukan di sini.

Genetika

Ahli genetika membedakan antara gen dan sifat yang muncul dari suatu individu. Gen yang sesungguhnya dari suatu individu disebut sebagai genotipnya; sedangkan sifat yang muncul atau penampilan dari gen tesebut disebut fenotipnya. Fenotip tidak hanya ditentukan oleh genotip tetapi juga oleh interaksi genotip dengan lingkungannya.

Suatu individu mempunyai alela yang menentukan genotip suatu sifat tertentu dari individu tersebut. Alela yang menunjukkan sifat dominan ditandai dengan huruf besar, misalnya A dan untuk sifat resesif ditandai dengan huruf kecil, misalnya a. Berarti pasangan alela yang mungkin adalah pasangan yang ditandai dengan AA, Aa dan aa. Pasangan alela ini disebut genotip individu dan genotip inilah yang menentukan sifat tertentu dari suatu individu. Sebagai contoh, pada tanaman kacang polong, ada genotip yang menentukan warna hijau (H) atau kuning (h), bentuk licin (L) atau berkerut (l), dll. Diasumsikan warna hijau dan bentuk licin bersifat dominan. Maka genotip HH dan Hh menentukan warna hijau; genotip hh menentukan warna kuning, genotip LL dan Ll menentukan bentuk licin dan genotip ll menentukan bentuk berkerut.

Dalam warisan otosomal, suatu individu mewarisi satu alela dari setiap pasangan alela induknya untuk membentuk pasangan alela individu itu sendiri. Sebagai contoh, jika induk mempunyak genotip Aa untuk satu sifat tertentu, maka turunannya akan mewarisi alela A atau alela a dari induk tersebut dengan peluang yang sama. Jadi, jika untuk satu sifat tertentu induk jantan mempunyai genotip AA, maka turunannya akan menerima alela A dari ntuk jantan dan alela A atau alela a dari induk betina dan, sehingga turunannya akan mempunyai genotip AA atau Aa.

Dalam tulisan ini hanya akan dilihat satu sifat saja yaitu seperti pada tanaman kacang polong hanya dilihat warna saja atau bentuk saja.

Tabel peluang pemunculan genotip yang dimiliki oleh turunan untuk semua kombinasi dari genotip yang dimiliki oleh kedua induk sebagai berikut :

Induk / Turunan	AA-AA	AA-Aa	AA-aa	AA-Aa	AA-aa	aa-aa
AA	1	1/2	0	1/4	0	0
Aa	0	1/2	1	1/2	1/2	0
aa	0	0	0	1/4	1/	1

Berdasarkan hal di atas muncul permasalahan bagaimanakah cara mendapatkan suatu sifat unggul dari individu tertentu? Masalah ini akan dipecahkan menggunakan prosedur perhitungan yang melibatkan konsep diagonalisasi matriks.

Pendugaan Distribusi Sifat pada Generasi ke-n

Dalam bidang pertanian, pemakaian prinsip-prinsip genetika paling luas pemakaiannya. Usaha pemuliaan tanaman dan hewan ternak melalui kegiatan seleksi guna mendapatkan varietas-varietas dan *strain* unggul dilakukan dengan prinsip genetika. Sifat-sifat yang diinginkan pada varietas dan *strain* unggul diseleksi dari beberapa generasi dan kemudian dijadikan bibit unggul (Rondonuwu S., 1989:7).

Dalam rangka mendapatkan varietas unggul itulah muncul permasalahan seperti pada contoh berikut.

Contoh 1. Misalkan seorang petani mempunyai suatu populasi tumbuh. Genotip dari tumbuhan tersebut terdiri dari suatu distribusi dari ketiga macam genotip yang mungkin, yaitu AA, Aa, dan aa. Petani ini ingin mengembangbiakkan tumbuhan tersebut dengan cara setiap tumbuhan dalam populasi itu selalu dikawinkan dengan tumbuhan yang genotipnya Aa. Setelah generasi ke-n, bagaimanakah distribusi dari ketiga genotip yang mungkin dalam populasi tersebut?

Untuk menyelesaikan masalah tersebut, dimisalkan pada generasi ke-n tumbuhan yang genotipnya AA sebanyak a_n bagian, tumbuhan yang genotipnya Aa sebanyak b_n bagian dan tumbuhan yang genotipnya aa sebanyak c_n. Berarti a_0, b_0, c_0 merupakan distribusi permulaan dari genotip-genotip itu dan $a_n + b_n + c_n = 1$ dengan $n = 0, 1, 2, \ldots$

Tabel peluang pemunculan genotip yang dimiliki oleh turunan untuk semua kombinasi dari genotip yang dimiliki oleh kedua induk adalah sebagai berikut :

Induk / Turunan	AA-Aa	Aa-Aa	aa-Aa
AA	1/2	1/4	0
Aa	1/2	1/2	1/2
aa	0	1/4	1/2

Untuk bilangan asli n diperoleh sistem persamaan berikut :

$$a_n = 1/2\, a_{n-1} + 1/4\, b_{n-1}$$

$$b_n = 1/2\, a_{n-1} + 1/2\, b_{n-1} + 1/2\, c_{n-1}$$

$$c_n = 1/4\, b_{n-1} + 1/2\, c_{n-1}$$

Sistem persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{dengan n bilangan asli}$$

Jika $x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$; $M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$; $x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}$ maka sistem persamaan atas menjadi $x^{(n)} = Mx^{(n-1)}$, untuk setiap bilangan asli n ... (1)

Karena persamaan (1) berlaku untuk setiap bilangan asli n, maka

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2 x^{(n-2)} = \ldots\ldots = M^n x^{(0)}.$$

Akibatnya, dapat ditentukan banyaknya tumbuhan yang genotipnya A, Aa, dan aa pada generasi ke-n jika dapat dicari M^n. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan langkah-langkah yang telah diperoleh pada bagian 1 di atas sebagai berikut.

Untuk mencari nilai eigen, telebih dahulu dicari determinan dari M - λ 1.

$$\det(M - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1/2 - \lambda & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 - \lambda & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= -1/2\,\lambda\ (-2\lambda + 1)(-\lambda + 1).$$

Berarti nilai-nilai eigen dari matriks M adalah 0, 1/2, dan 1. Dengan mudah dapat dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen 0, 1/2, dan 1 berturut-turut adalah :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \text{ dan } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh matriks $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; $p^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$;

dan matriks $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Dengan demikian diperoleh :

$$M^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} (1/4) + (1/2)^{n+1} & 1/4 & (1/4) - (1/2)^{n+1} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ (1/4) - (1/2)^{n+1} & 1/4 & (1/4) + (1/2)^{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Jadi} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/4) + (1/2)^{n+1} & 1/4 & (1/4) - (1/2)^{n+1} \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ (1/4) - (1/2)^{n+1} & 1/4 & (1/4) + (1/2)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga} \quad a_n &= (1/2)^{n+1} \quad (a_0 - c_0) + 1/4 \quad (a_0 + b_0 + c_0) \\ &= (1/2)^{n+1} \quad (a_0 - c_0) + 1/4; \text{karena } (a_0 + b_0 + c_0) = 1 \\ b_n &= (1/2) \quad (a_0 + b_0 + c_0) = 1/2 \\ c_n &= (1/2)^{n+1} (-a_0 + c_0) + 1/4 \quad (a_0 + b_0 + c_0) \\ &= (1/2)^{n+1} (-a_0 + c_0) + 1/4 \end{aligned}$$

Dengan demikian pada generasi ke-n diperoleh tumbuhan yang genotipnya AA sebanyak $(1/2)^{n+1}(a_0 - c_0) + 1/4$ bagian; yang genotipnya Aa sebanyak 1/2 bagian dan yang genotipnya aa sebanyak $(1/2)^{n+1}(-a_0 + c_0)+1/4$ bagian.

Hal ini menunjukkan bahwa setiap generasi selalu menghasilkan tanaman dengan sifat yang tidak unggul karena banyaknya tanaman dengan sifat yang tidak unggul karena banyaknya tanaman bergenotip aa tidak nol.

Contoh 2. Seperti pada contoh 1, tetapi semua tumbuhan dikawinkan dengan tumbuhan yang genotipnya AA. Kemudian generasi pertama dikawinkan dengan tumbuhan yang genotipnya Aa, generasi kedua dikawinkan dengan tumbuhan yang genotipnya AA, dan seterusnya pola perkawinan bergantian ini diperlakukan. Setelah generasi ke- n, bagaimanakah distribusi dari ketiga genotip yang mungkin dalam populasi tersebut?

Seperti pada contoh 1, dimisalkan pada generasi ke-n tumbuhan yang genotipnya AA sebanyak a_n bagian, tumbuhan yang genotipnya Aa sebanyak b_n bagian dan tumbuhan yang genotipnya aa sebanyak c_n bagian.

Berarti a_0, b_0, dan c_0 merupakan distribusi permulaan dari genotip-genotip itu dan $a_n + b_n + c_n = 1$, dengan $n = 0, 1, 2, ...$

Untuk $n = 0, 1, 2, ...$ tabel peluang pemunculan genotip yang dimiliki oleh turunan ke-2n+1 untuk kombinasi dari genotip yang dimiliki oleh kedua induk adalah sebagai berikut :

Induk / Turunan	AA-AA	Aa-AA	aa-AA
AA	1	1/2	0
Aa	0	1/2	1
aa	0	0	0

Berarti untuk n = 0, 1, 2, ... berlaku sistem persamaan berikut :

$$a_{2n+1} = a_{2n} + 1/2\, b_{2n}$$

$$b_{2n+1} = 1/2\, b_{2n} + c_{2n} \qquad \ldots (2)$$

$$c_{2n+1} = 0$$

Untuk n = 1, 2, ... tabel peluang pemunculan genotip yang dimiliki oleh turunan ke-2n untuk kombinasi dari genotip yang dimiliki oleh kedua induk adalah sebagai berikut :

Induk / Turunan	Aa-Aa	Aa-Aa	aa-Aa
AA	1/2	1/4	0
Aa	1/2	1/2	1/2
aa	0	1/4	1/2

Berarti untuk n = 1,2, ... berlaku sistem persamaan berikut :

$$a_{2n} = 1/2\, a_{2n-1} + 1/4\, b_{2n-1}$$

$$b_{2n} = 1/2\, a_{2n-1} + 1/2\, b_{2n-1} + 1/2\, c_{2n-1} = 1/2 \qquad \ldots (3)$$

$$c_{2n} = 1/4\, b_{2n-1} + 1/2\, c_{2n-1}$$

Dari sistem persamaan (2) dan (3) di atas diperoleh sistem persamaan berikut :

I $\quad a_{2n+1} = 3/4\, a_{2n-1} + 1/2\, b_{2n-1} + 1/4\, c_{2n-1}$

$\quad b_{2n+1} = 1/4\, a_{2n-1} + 1/2\, b_{2n-1} + 3/4\, c_{2n-1}$

$\quad c_{2n+1} = 0$, untuk n = 0, 1, 2, ...

dan juga

II $a_{2n} = 1/2\, a_{2n-2} + 3/8\, b_{2n-2} + 1/4\, c_{2n-2}$

$b_{2n} = 1/2$

$c_{2n} = 1/8\, b_{2n-2} + 1/4\, c_{2n-2}$, untuk $n = 1, 2, \ldots$

Sistem persamaan I dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2n-1} \\ b_{2n-1} \\ c_{2n-1} \end{bmatrix} \quad \text{dengan } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Jika $x^{(2n+1)} = \begin{bmatrix} a_{2n+1} \\ b_{2n+1} \\ c_{2n+1} \end{bmatrix}$; $M_1 = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $x^{(2n-1)} = \begin{bmatrix} a_{2n-1} \\ b_{2n-1} \\ c_{2n-1} \end{bmatrix}$ maka sistem persamaan di atas menjadi :

$$x^{(2n+1)} = M_1\, x^{(2n-1)}, \forall n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Karena persamaan (4) berlaku untuk setiap $n = 0, 1, 2, \ldots$ maka

$$x^{(2n+1)} = M_1\, x^{(2n-1)} = M_1^{\,2}\, x^{(2n-3)} = \ldots = M_1^{\,n}\, x$$

Selanjutnya dicari $M_1^{\,n}$ dengan prosedur seperti pada contoh 1.

$$\det (M_1 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3/4-\lambda & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2-\lambda & 3/4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -1/4\lambda\ (4\lambda - 1)(\lambda - 1)$$

Berarti nilai-nilai eigen untuk matriks M_1 adalah 0, 1/4 dan 1. Vektor-vektor eigen untuk nilai-nilai eigen yang bersesuaian berturut-turut adalah :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ dan } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi matriks $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & -5/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

Dengan demikian diperoleh :

$$M_1{}^n = PD^n P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3(4^n)} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3(4^n)} & \frac{2}{3} - \frac{5}{3(4^n)} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3(4^n)} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3(4^n)} & \frac{1}{3} + \frac{5}{3(4^n)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $x^{(2n+1)} = M_1{}^n x$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3(4^n)} & \frac{2}{3} - \frac{2}{3(4^n)} & \frac{5}{3(4^n)} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3(4^n)} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3(4^n)} & \frac{1}{3} + \frac{5}{3(4^n)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3(4^n)} & \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3(4^n)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3(4^n)}\right) & \frac{2}{3} - \frac{2}{3(4^n)} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3(4^n)} & \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3(4^n)}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3(4^n)}\right) & \frac{1}{3} + \frac{2}{3(4^n)} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

Berarti
$$a_{2n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6(4^n)} (2a_0 - b_0 - 4c_0)$$
$$b_{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6(4^n)} (-2a_0 + b_0 + 4c_0)$$
$$c_{2n+1} = 0$$

Dari hasil di atas, pada generasi ke-2n+1, dengan n = 0,1,2, ... diperoleh banyaknya tumbuhan yang bergenotip AA sebanyak $\frac{2}{3} + \frac{1}{6(4^n)}$ $(2a_0 - b_0 - 4c_0)$ bagian; bergenotip Aa sebanyak $\frac{1}{3} + \frac{1}{6(4^n)}$ $(-2a_0 + b_0 + 4c_0)$ bagian; dan tidak ada yang bergenotip aa.

Hal ini menunjukkan bahwa dari setiap generasi ke-2n+1 diperoleh tumbuhan dengan varietas unggul untuk sifat yang ditentukan oleh genotip A tersebut.

Dengan cara serupa diselesaikan persamaan II di atas dan diperoleh :

$$a_{2n} = \frac{5}{12} + \frac{1}{6(4^n)}\,(2a_0 - b_0 - 4c_0)$$

$$b_{2n} = \frac{1}{2}$$

$$c_{2n} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6(4^n)}\,(-2a_0 + b_0 + 4c_0)$$

Dari hasil ini, pada generasi ke-2n, n = 1,2, ... diperoleh banyaknya tumbuhan yang bergenotip AA sebanyak $\frac{5}{12} + \frac{1}{6(4^n)}\,(2a_0 - b_0 - 4c_0)$ bagian; bergenotip Aa sebanyak 1/2 bagian, dan bergenotip aa sebanyak $\frac{1}{12} + \frac{1}{6(4^n)}(-2a_0 + b_0 + 4c_0)$bagian.

Hal ini menunjukkan bahwa setiap generasi ke-2n, dengan n = 0, 1, 2, ... selalu ada tanaman dengan sifat yang tidak unggul.

Dengan menggunakan prosedur perhitungan di atas, dapat diduga distribusi sifat pada generasi ke-n.

Penutup

Jika diketahui distribusi genotip dan perkawinan dalam suatu populasi maka dapat diramalkan distribusi genotip tersebut setelah generasi ke-n. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan perhitungan diagonalisasi matriks yang komponen-komponennya dapat diperoleh dari peluang pemunculan genotip turunan ke-n untuk kombinasi dari genotip kedua induk.

Konsep-konsep nilai dan vektor eigen serta diagonalisasi matriks bukanlah konsep-konsep abstrak yang tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah nyata. Contoh yang disajikan dalam tulisan ini bukanlah satu-satunya bidang yang menggunakan konsep- konsep tersebut melainkan masih ada bidang-bidang lain yang juga menggunakan konsep-konsep tersebut meskipun tidak dibicarakan dalam tulisan ini.

Daftar Pustaka

Anton, H. Penterjemah: Silaban, P. 1985. ***Aljabar Linier Elementer***. Jakarta: Erlangga.

Anton, H. dan Rorres, C. Penterjemah: Silaban, P. dan Susila, N. 1988. ***Penerapan Aljabar Linier***. Jakarta: Erlangga.

Maxson, L.R. and Daugherty, C.H. 1985. ***Genetics***. Wm. C. Brown Publishers. USA.

Rondonuwu, Suleman. 1989. ***Dasar-Dasar Genetika***. Jakarta: Depdikbud.